This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

The Gift of

WILLIAM H. BUTTS, Ph.D.

A.B. 1878 A.M. 1879

Teacher of Mathematics

1898 to 1922

Assistant Dean, College of Engineering

1908 to 1922

Professor Emeritus

1922

Digitized by Google

QB
43
.B62
1810

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

TRAITÉ
ÉLÉMENTAIRE
D'ASTRONOMIE PHYSIQUE.

TOME PREMIER.

Digitized by Google

IMPRIMERIE DE H. PERRONNEAU.

Digitized by Google

TRAITÉ
ÉLÉMENTAIRE
D'ASTRONOMIE PHYSIQUE,

PAR J.-B. BIOT,
Membre de l'Institut de France, etc.,

AVEC DES ADDITIONS RELATIVES A L'ASTRONOMIE NAUTIQUE,

PAR M. DE ROSSEL,
Ancien Capitaine de vaisseau, rédacteur et coopérateur du Voyage de d'Entrecasteaux.

SECONDE ÉDITION,

Destinée à l'enseignement dans les Lycées impériaux et les Écoles secondaires.

RADCLIFFE OBSERVATORY OXFORD.

Omnium rerum principia parva sunt,
Sed suis progressionibus usa augentur.
CIC. de Fin., lib. V.

PARIS,
J. KLOSTERMANN fils, acquéreur du fonds de Mad. Ve. BERNARD, rue du Jardinet, n°. 13, quartier St.-André-des-Arts;
SAINT-PÉTERSBOURG,
KLOSTERMANN père et fils, Libraires.

M. DCCC. X.

Digitized by Google

Digitized by Google

Gen Lib
Gift
Professor William H. Butts
10-14-1935

A

M. LAPLACE,

MEMBRE DE L'INSTITUT DE FRANCE.

MON CHER ET ILLUSTRE CONFRÈRE,

En vous dédiant cet Ouvrage, je cède aux motifs les plus doux et les plus justes. C'est vous qui m'avez engagé à l'entreprendre ; c'est dans vos écrits que j'en ai puisé les matériaux : enfin, vos conseils m'ont soutenu dans l'exécution.

Je l'offre sur-tout à cette amitié constante que vous m'avez témoignée ; amitié indépendante du tems et des circonstances. Je l'offre à cet amour ardent des sciences, qui vous fait regarder leur étude comme le plus grand de tous les plaisirs, et leurs progrès comme le plus grand bien de l'humanité. Je l'offre enfin à ce noble zèle qui

Digitized by Google

vous porte à exciter puissamment tous ceux qui se livrent aux sciences, et qui vous fait rechercher et encourager les jeunes gens qui les cultivent.

J'ai exposé, dans ce Traité élémentaire, les phénomèmes généraux qui servent de base à la théorie du systême du monde. Il existe un autre ouvrage où ces phénomènes sont développés de la manière la plus sublime, et suivis avec détail dans leurs conséquences les plus éloignées. J'ai fait tout mes efforts pour conduire les jeunes gens à l'intelligence de ces recherches profondes. Si je les ai secondés, ou seulement encouragés dans cette entreprise, j'aurai réussi au gré de mes espérances, et je croirai mon travail récompensé.

C'est le besoin de rendre ma reconnaissance publique qui m'a fait desirer que votre nom parût à la tête de mon Ouvrage; c'est la volonté d'en rendre le témoignage durable, qui me fait souhaiter qu'il ait quelque succès.

BIOT.

Digitized by Google

DISCOURS
PRÉLIMINAIRE.

Lorsqu'un auteur publie un livre nouveau sur un sujet déja traité, il doit lui être permis d'exposer les motifs qui l'ont engagé à écrire, afin que l'on juge si son travail a réellement quelque utilité.

Cela devient plus nécessaire encore si l'ouvrage est destiné à l'enseignement. L'auteur, en faisant connaître le but qu'il s'est proposé, le plan qu'il a formé, la marche qu'il a suivie, met le public en état de juger si l'ouvrage est bon ou mauvais, utile ou nuisible. Car, lorsqu'il s'agit de livres élémentaires, où la méthode est le principal mérite, on peut juger un ouvrage sur le seul enchaînement des propositions.

Je me trouve particulièrement astreint à remplir ces conditions avec franchise. L'astronomie est de toutes les sciences la plus ancienne, la plus perfectionnée, et celle sur laquelle on a le

Digitized by Google

plus écrit ; quoique par une contradiction assez bisarre elle n'ait pas encore été introduite dans les premiers degrés de l'instruction publique. Le Gouvernement ayant décidé qu'on exposerait les élémens de l'astronomie dans les lycées nationaux, je fus chargé de composer, sur ce sujet, un ouvrage propre à être mis dans les mains des élèves. Pour ajouter à l'enseignement cette branche nouvelle et l'y fixer avec quelque certitude, voici, après bien des réflexions, le plan que j'ai cru devoir adopter.

Je prends un élève qui n'a absolument aucune connaissance d'astronomie, ni même de cosmographie. Je lui suppose, sur les mouvemens célestes, et sur la figure de la terre, tous les préjugés qui naissent du témoignage habituel de nos sens ; et d'observations en observations, je le conduis, peu-à-peu, jusqu'à trouver de lui-même, par le raisonnement, le véritable mécanisme du systême du monde ; c'est-à-dire le mouvement de la terre et les lois de Képler : tel est le plan de mon ouvrage.

Mais je n'arrive pas, tout-à-coup, à ce terme ; et dans la discussion de ces vérités, si opposées aux témoignages de nos sens, je me garde bien de laisser voir, dès le commencement, une

Digitized by Google

opinion décidée. Je me contente d'abord de jeter quelques doutes sur ces témoignages qui paraissent irrécusables. Je fais voir que les phénomènes pourraient encore s'expliquer dans des hypothèses contraires à celles que nos yeux nous indiquent. Quand j'ai ainsi appris à l'élève à douter, je parviens bientôt à lui faire comprendre que ces prétendus témoignages ne sont absolument d'aucun poids; et qu'il serait contraire aux règles du raisonnement d'en tirer aucune conséquence décisive. Peu-à-peu j'amène les faits qui sont plus faciles à expliquer en supposant le mouvement de la terre : tels sont la précession et la nutation. L'élève dégagé de ses préjugés, et devenu indifférent à toute explication, ne fait aucune difficulté de les représenter, de la manière la plus simple. Bientôt le mouvement des planètes fournit des inductions plus fortes; les lois de Képler appuient ces inductions par des analogies frappantes. Le mouvement de la terre devient déja un phénomène probable. Enfin, les stations et les rétrogradations apparentes des planètes, leur rotation, leur applatissement et sur-tout l'aberration de la lumière, achevant de confirmer cette vérité, elle devient tout-à-fait certaine.

Pour arriver sûrement à ce résultat, et le

Digitized by Google

fixer dans l'esprit des élèves, d'une manière inébranlable, il ne suffisait pas de leur indiquer les phénomènes, ou de les rapporter succinctement, comme on aurait pû faire dans un simple discours sur l'astronomie. Il fallait les leur montrer d'une manière réelle et pour ainsi dire palpable, en leur donnant la connaissance nette et positive des moyens par lesquels on les a reconnus. J'ai donc rapporté, très-exactement, les méthodes d'observations qui ont servi à découvrir les phénomènes; et c'est toujours sur des observations réellement faites que j'ai établi mes résultats.

En suivant cette marche, je n'ai besoin que de calculs fort simples, qui supposent seulement les premières notions de l'arithmétique et de la géométrie. Le systême du monde, envisagé de cette manière, devient un grand problême de physique, dont il faut chercher la solution dans les phénomènes observés. C'est pour cela que j'ai intitulé cet ouvrage, *Traité élémentaire d'Astronomie physique.*

Je l'ai divisé en cinq livres : dans le premier je fais connaître les phénomènes généraux du systême du monde, et les moyens qu'on a de les observer. C'est là qu'en suivant la marche naturelle d'induction, j'amène successivement

Digitized by Google

toutes les méthodes fondamentales dont les livres suivans renferment les applications. Le second livre contient la théorie du soleil; le troisième, celle de la lune; le quatrième, celle des planètes, des comètes et des satellites; le cinquième, les principales applications de l'astronomie.

Le texte de l'ouvrage ne contient rien au-dessus de la portée d'un élève qui a les premières notions des mathématiques. Quand la série des raisonnemens, ou la comparaison des faits a supposé quelques calculs un peu plus difficiles, par exemple, des opérations trigonométriques, je les ai placées en note au bas des pages; et j'ai rejeté dans d'autres notes, à la fin de chaque livre, les développemens, ou les calculs qui exigeaient des connaissances mathématiques plus élevées. Je desire que l'élève lise d'abord le texte de chaque livre, et qu'il s'essaie ensuite sur les notes, selon ses forces.

J'ai eu grand soin de faire remarquer les phénomènes de physique générale, qui sont liés au mécanisme du systême du monde, et à l'étude de l'astronomie. Ces phénomènes sont nombreux, variés; leur discussion exige souvent des considérations fines et délicates, et le vaste champ où ils se développent, ainsi que leur

Digitized by Google

influence sur nous, leur donne encore, à ce qu'il me semble, un intérêt tout particulier. Je les ai exposés avec détail, et autant que je l'ai pu, avec exactitude. Si je me suis trompé en quelque chose, au moins je n'ai jamais cherché à cacher l'erreur ou à dissimuler les difficultés. J'ai, au contraire, cherché à indiquer ces dernières aussi nettement et précisément qu'il m'a été possible. Tromper les jeunes gens dans l'étude des sciences, c'est la manière la plus funeste et la plus sûre de gâter à jamais leur jugement.

Il m'a semblé qu'un ouvrage exécuté sur le plan que je viens d'exposer, et contenant à-la-fois des idées justes et fécondes, pourrait, s'il était bien fait, suffire au très-grand nombre d'élèves qui n'ont besoin que de connaissances générales, et préparer utilement ceux que des dispositions particulières porteraient à aller plus loin. Voilà ce que j'ai voulu faire; je suis loin de me flatter d'avoir complètement réussi.

Cependant j'y ai mis tous mes efforts. Dans la première édition j'avais eu soin de consulter les meilleurs ouvrages qui traitent de l'astronomie, j'avais cherché à en extraire les résultats qui me paraissaient devoir être les plus généralement utiles. Mais me confiant très-peu dans ma

Digitized by Google

propre expérience, j'avais sollicité comme une faveur la critique éclairée des astronomes, et celle des professeurs qui feraient à mon ouvrage l'honneur de le prendre pour texte de leurs leçons. J'ai eu le bonheur de voir mon attente remplie; M. Delambre a bien voulu me témoigner assez d'intérêt pour me donner par écrit un grand nombre de remarques qui m'ont été extrêmement précieuses, et dont je n'ai pas manqué de profiter. J'éprouve un sensible plaisir à pouvoir exprimer ici ma reconnaissance envers ce savant célèbre, qui, par un heureux accord de la science du calcul avec l'art des observations, a éclairé et avancé toutes les parties de l'astronomie; et qui par ses travaux constans, par son exactitude, par son amour sincère de la vérité a mérité d'être regardé comme le modèle des astronomes d'aujourd'hui. Je me plais aussi à reconnaître ce que je dois aux conseils de mes dignes amis, MM. les professeurs Pictet et Prévost, de Genève, ainsi qu'aux excellentes remarques de leur collègue M. le professeur Maurice, qui a bien voulu se servir de mon livre dans ses cours publics, avant que des fonctions plus éminentes l'eussent appelé dans une autre carrière. Enfin, depuis la première publication de cet ouvrage, j'ai eu

Digitized by Google

l'occasion de pratiquer les opérations les plus délicates de l'astronomie, ayant été chargé de terminer l'opération de la méridienne en Espagne, conjointement avec M. Arago, adjoint du Bureau des longitudes, et avec les commissaires espagnols MM. Chaix et Rodrigues. Ce travail ayant dirigé mes recherches vers l'astronomie, j'ai pu mieux sentir ce qui manquait à la première édition de mon ouvrage, principalement à l'égard des observations dont je n'avais pas fait assez usage, et sur-tout dont je n'avais pas suffisamment détaillé les procédés. Aussi j'ai cherché à réparer ce défaut dans cette nouvelle édition, et j'ai été d'autant plus à portée de le faire, que j'ai pu profiter des excellentes observations astronomiques faites journellement à l'Observatoire de Paris, par MM. Mathieu et Bouvard, le premier secrétaire, le second membre du Bureau des longitudes. M. Mathieu a eu la complaisance d'extraire de ce riche dépôt et de calculer pour moi une grande partie des observations que j'ai données comme exemple. La conversation et les avis de tant de personnes distinguées, ainsi que la pratique que j'ai pu acquérir par moi-même, m'ont été d'un grand secours pour améliorer mon ouvrage, et me

Digitized by Google

font espérer que j'ai dû réussir à le rendre moins imparfait.

Il est une branche de l'astronomie qui n'a jamais été traitée dans les livres élémentaires d'une manière convenable, parce que pour être exposée d'une manière utile, elle exige beaucoup d'exactitude, beaucoup de simplicité, et une extrême habitude de pratique que très-peu de personnes ont eu l'occasion d'acquérir : je veux parler de l'astronomie nautique. Cette partie manquait entièrement dans ma première édition, comme dans la plupart des ouvrages du même genre ; où elle est traitée trop superficiellement ou d'une manière beaucoup trop scientifique pour des marins. J'ai été assez heureux pour qu'une des personnes les plus en état d'écrire sur cette matière, et d'y faire autorité, ait bien voulu se joindre à moi pour cette partie. C'est M. de Rossel, ancien capitaine de vaisseau, rédacteur et coopérateur du Voyage de d'Entrecasteaux. Les observations faites dans ce voyage par M. de Rossel et par les officiers qui l'accompagnaient, ont été généralement regardées comme les plus exactes qui aient été faites dans une expédition maritime de notre nation, et la manière dont M. de Rossel les a discutées a été accueillie avec raison comme

Digitized by Google

un excellent traité d'astronomie nautique. C'est un traité de ce genre, mais plus abrégé et plus simple que M. de Rossel a bien voulu ajouter à mon ouvrage. On y trouvera toutes les méthodes dont on a besoin à la mer ; et, ce qui n'est pas moins précieux, on les y trouvera sous la forme la plus commode et la plus simple où on puisse les employer dans les applications. Les marins remarqueront sans doute les tables ingénieuses que M. de Rossel a calculées, pour faciliter l'usage de la méthode de Dows, qui donne la latitude par deux hauteurs observées hors du méridien. Au moyen des tables dont je parle, cette méthode, qui peut souvent être d'une grande utilité, deviendra si aisée et si commode, qu'il n'y a pas de doute que son usage deviendra familier à tous les marins.

Cette addition importante jointe à celles que le desir d'améliorer mon premier travail m'avait suggérées, ont étendu cette nouvelle édition jusqu'à trois volumes. Mais aussi j'espère qu'avec cette extension, elle offrira tout ce qui est nécessaire pour l'intelligence des phénomènes du système du monde, et toutes les données, toutes les formules, toutes les tables

Digitized by Google

nécessaires pour exécuter et calculer les observations usuelles. Ces tables se trouveront dans le troisième volume, à la suite de l'astronomie nautique, avec un petit précis de gnomonique et de nivellement. Mon but a été qu'un observateur européen, qui partirait pour un grand voyage, aux Indes ou en Amérique, et qui serait muni de quelques instrumens, pût sans autre secours que mon ouvrage, avec la Connaissance des tems, et une table de logarithmes, faire avec la plus grande exactitude toutes les observations qui peuvent être utiles à l'astronomie, ou à la géographie, et calculer lui-même sur les lieux, toutes celles qui sont nécessaires ou simplement utiles pour éclairer sa route, et fixer à chaque instant sa position sur le globe. D'après cette intention, j'ai dû m'étendre un peu plus sur certaines parties, un peu moins sur d'autres, selon que je prévoyais plus ou moins de fréquence et d'utilité dans leurs applications. C'est ce que j'ai tâché de faire avec autant de discernement qu'il m'a été possible. Mon but est simple et précis, le public jugera si j'ai réussi à en approcher. Si les personnes qui se serviront de mon ouvrage veulent encore m'honorer de leurs remarques, je les recevrai avec reconnaissance, persuadé qu'un livre

Digitized by Google

élémentaire ne devient jamais bon qu'à force de le corriger.

Dans le résumé que je viens de faire, on sera peut-être étonné que je n'aie point parlé du grand ouvrage de M. Laplace sur l'exposition du systême du monde, et la mécanique céleste. La raison en est simple ; je ne devais aux autres traités que quelques détails ; je dois à celui-ci le fonds et la substance même de mon livre, et j'aurai réussi au gré de mes espérances, si je puis conduire les élèves jusqu'à lui.

Digitized by Google

TABLE

DES CHAPITRES.

LIVRE PREMIER.

Page.

Phénomènes généraux et moyens d'observations 1

CHAP. Ier. *Spectacle du Ciel* . . . . . ibid.

CHAP. II. *De la Rondeur de la Terre.* 10

CHAP. III. *De l'Atmosphère* 21

CHAP. IV. *Des Instrumens nécessaires pour les observations astronomiques* . . . 37

CHAP. V. *De l'Instrument des passages et de la manière de s'en servir* 49

CHAP. VI. *De l'Égalité des révolutions du ciel, et de leur usage pour la mesure du Tems.* 57

CHAP. VII. *Détermination exacte du Méridien par la mesure du tems. Définition exacte de la Méridienne, de la Perpendiculaire et des Azimuths* 73

CHAP. VIII. *Direction de l'axe de rotation du Ciel. Description et usage du Quart-de-cercle mural. Détermination de la hauteur du Pôle. La Terre est comme un point dans les espaces célestes.* . 83

CHAP. IX. *Détermination exacte des lois du Mouvement diurne. Preuve que ce mouvement est circulaire. Preuve qu'il est*

Digitized by Google

Page.

uniforme. Mesure du tems par les arcs célestes 100

CHAP. X. *De la Sphère céleste et de ses Cercles principaux.* 113

CHAP. XI. *Des Pôles et de l'Équateur de la Terre. Définition des Parallèles terrestres. Aspects divers de la Sphère céleste sur les horisons des différens pays* . . 131

CHAP. XII. *Détermination exacte de la figure de la Terre. Mesure exacte de sa grandeur.* 141

CHAP. XV. *Manière de fixer la position des différens points de la Surface terrestre.* . 172

CHAP. XVI. *Examen des conséquences physiques qui résultent de l'universalité du Mouvement diurne. Il ne s'ensuit pas nécessairement que ce mouvement doive être attribué aux Astres plutôt qu'à la Terre.* 184

CHAP. XVII. *Conséquences physiques de l'applatissement de la Terre. Longueur du Pendule à secondes sur les différens parallèles terrestres.* 192

CHAP. XVIII. *Des Réfractions atmosphériques.* . . 203

CHAP. XIX. *Des Parallaxes.* 240

CHAP. XX. *Description et usages du Cercle répétiteur* 273

CHAP. XXI. *Instrumens dont on se sert en mer. Description et usages du Sextant.* 349

CHAP. XXII. *Du Cercle à réflexion* 378

CHAP. XXIII. *De la Boussole.* 400

NOTES 415

FIN DE LA TABLE DES CHAPITRES.

Digitized by Google

TRAITÉ

ÉLÉMENTAIRE

D'ASTRONOMIE PHYSIQUE.

LIVRE PREMIER.

PHÉNOMÈNES GÉNÉRAUX ET MOYENS D'OBSERVATIONS.

CHAPITRE PREMIER.

Spectacle du Ciel.

1. SUPPOSONS-NOUS placés sur un lieu élevé, dans un pays découvert, où la vue soit libre de toutes parts. Le *soleil* vient de se coucher; mais la partie du ciel où il a disparu brille encore de sa lumière. Peu-à-peu cette clarté s'affaiblit, l'obscurité s'accroît, la *nuit* vient, et le ciel, étendu sur nos têtes, semble une voûte parsemée d'une multitude de points étincelans; ce sont les *étoiles*, que l'éclat trop vif du soleil nous empêchait d'appercevoir

Digitized by Google

pendant le *jour*. L'ordre, l'arrangement de ces *astres* paraît fixe et immuable. Il est le même aujourd'hui qu'il était dans les tems les plus reculés. Les configurations des divers groupes d'étoiles sont encore telles que les anciens les ont décrites, en les rassemblant sous le nom de *constellations*, et les liant, pour aider la mémoire, à des figures d'hommes ou d'animaux. Mais ces astres, assujétis à un ordre constant, se meuvent tous ensemble dans le ciel, comme par une rotation générale, dont on ne tarde pas à reconnaître les effets. Les uns s'abaissent vers l'*occident*, du côté où le soleil a disparu; bientôt ils se *couchent* et disparaissent comme lui; tandis que du côté opposé, à l'*orient*, d'autres astres se *lèvent* et semblent sortir de dessous l'*horison*, c'est-à-dire des points de la terre ou de la mer où la vue est limitée. Après s'être élevés dans le ciel à diverses hauteurs, ils redescendront ensuite, en se couchant à leur tour, comme ceux qui les précédaient. Mais si, dans nos climats, on se place de manière que l'on ait l'orient à la droite et l'occident à la gauche, on voit, dans la partie du ciel qui se trouve en face, et qui se nomme le *nord*, des groupes d'étoiles qui ne se couchent point : telle est, par exemple, la constellation de la grande ourse ou du chariot, qui est connue même des gens de la campagne. Cette constellation, et la plupart de celles qui se trouvent dans cette partie du ciel, ne disparaissent que lorsque l'éclat du soleil vient les effacer. On peut les voir pendant toute la nuit, et les suivre jusque dans la partie inférieure de leur marche, car elles n'atteignent jamais l'horison. En les observant à divers instans de la nuit, on les voit prendre dans le ciel des positions renversées, effet naturel de cette rotation qui leur est commune avec tous les autres astres; et le centre de leur mouvement, indiqué par ces phénomènes, paraît être un point du ciel situé du côté du nord.

Digitized by Google

Mais bientôt le ciel blanchit à l'orient; cette clarté devient assez forte pour effacer les étoiles qui venaient de se lever de ce côté : l'occident seul reste encore obscur; c'est le contraire de ce qui est arrivé à l'entrée de la nuit. La lumière continuant à augmenter, les étoiles s'affaiblissent graduellement; enfin, elles s'effacent, et le jour se répand sur tous les objets. C'est le soleil qui va reparaître : il sort à son tour, et se lève à l'orient comme les autres astres; il monte, parcourt la voûte du ciel, puis s'abaisse et disparaît, ou se couche le soir dans la partie opposée : alors tous les phénomènes de la nuit recommencent dans le même ordre, selon les mêmes lois.

La *lune*, dont nous n'avons point encore parlé, et qui est si remarquable par la grandeur de son disque, par son éclat, et par les changemens qu'elle éprouve dans la configuration de sa partie lumineuse, changemens que l'on nomme ses *phases*, présente aussi des phénomènes analogues.

Ce mouvement de révolution, commun à tous les astres, et qui s'accomplit dans l'intervalle d'un jour et d'une nuit, s'appelle le *mouvement diurne*.

2. Puisque les étoiles situées du côté du nord, près du centre du mouvement général, restent toujours fort au-dessus de l'horison, tandis que d'autres plus éloignées du centre descendent plus près de l'horison, et que d'autres enfin plus éloignées encore viennent s'y plonger tout-à-fait, on voit que leur *coucher* est l'effet de la grandeur du cercle qu'elles décrivent, et qu'elles vont l'achever sous l'horison, par dessous la terre, lorsqu'elles disparaissent à nos yeux. La plus évidente analogie nous conduit à étendre cette explication aux étoiles situées dans la partie du ciel opposée au nord, c'est-à-dire vers le *sud*. Ces astres, après leur coucher, achèvent aussi leur révolution par dessous la terre, pour venir, comme le soleil, reparaître

Digitized by Google

à l'orient. Si donc, pour fixer les idées, on conçoit une ligne physique, ou *axe de rotation*, autour duquel tout ce mouvement s'exécute, il faudra concevoir que dans nos climats cet axe paraît élevé vers le nord et oblique sur notre *horison;* c'est-à-dire, sur le plan qui passant par nos yeux, et rasant la surface terrestre, sépare la partie visible du ciel de celle qui nous est cachée.

Il ne faut pas se représenter cet axe comme quelque chose de matériel existant réellement dans l'espace; ce n'est qu'une conception géométrique propre à désigner la série des points de l'espace qui paraissent immobiles dans le mouvement général. Il en est de même des *cercles* que les astres nous ont semblé décrire autour de cet axe dans leur révolution diurne; on ne doit entendre par là que la série des points de l'espace où nous les appercevons successivement: et quant à la supposition que ce mouvement diurne soit réellement et exactement circulaire, nous ne l'emploierons ici que comme une hypothèse propre à fixer les idées; car quoiqu'elle soit vraie dans toute la rigueur géométrique, la preuve complète n'en peut être donnée qu'au moyen d'instrumens très-précis, et d'après des considérations que nous sommes forcés de rejeter plus loin.

3. En examinant le ciel pendant un grand nombre de nuits, on remarque quelques astres qui changent de place parmi les étoiles; ceux-là ne font pas toujours partie des mêmes constellations: ils s'approchent peu-à-peu des unes, s'éloignent des autres, chaque jour d'une quantité imperceptible. Mais ces petits changemens accumulés finissent par devenir sensibles, et par transporter les astres qui les éprouvent dans des parties du ciel très-différentes; c'est pourquoi ces astres ont été nommés *planètes*, c'est-à-dire, étoiles errantes, par opposition au reste des astres

Digitized by Google

immobiles que l'on appelle étoiles fixes, ou simplement *fixes*.

Les planètes connues jusqu'à présent sont au nombre de dix ; elles ont reçu des noms particuliers et des signes caractéristiques qui servent à les désigner d'une manière abrégée. Ce sont Mercure ☿, Vénus ♀, Mars ♂, Jupiter ♃, Saturne ♄, Uranus ♅, Cérès ⚳, Pallas ⚴, Junon ⚵ et Vesta ⚶. Les cinq premières peuvent s'appercevoir à la vue simple ; elles ont été connues dès la plus haute antiquité. Uranus, découvert plus récemment, peut encore s'appercevoir avec une excellente vue ; mais les quatre autres sont si petites que ce n'est qu'avec de très-forts instrumens d'optique que l'on peut les appercevoir ; aussi les a-t-on appelées *planètes télescopiques*. D'après cela on conçoit aisément que leur découverte n'a pas été due au hasard, et à la simple inspection du ciel ; cette découverte, très-récente, est le résultat d'observations délicates, faites méthodiquement, avec des instrumens très-parfaits. Nous aurons l'occasion d'en parler plus loin (*).

Les mouvemens des planètes parmi les étoiles se nomment *mouvemens propres* : la lune et le soleil ont aussi des mouvemens propres, qui se reconnaissent de la même manière ; celui du soleil est sur-tout remarquable par les phénomènes qu'il produit.

4. Pour l'appercevoir, observez cet astre plusieurs jours de suite lorsqu'il est prêt à se coucher ; et, quand il est

(*) Uranus a été découvert par Herschell, le 13 mars 1781 ; Cérès, par Piazzi, le 1er. janvier 1801 ; Pallas, par Olbers, le 28 mars 1802 ; Junon, par Harding, le 1er. septembre 1803 ; Vesta, aussi par Olbers, le 29 mars 1807.

Digitized by Google

sous l'horison, examinez les étoiles qui le suivent et qui se couchent immédiatement après lui ; elles sont faciles à reconnaître par les figures qu'elles forment dans le ciel. Dans quelques jours vous ne les verrez plus. Ce seront d'autres étoiles qui suivront le soleil et se coucheront immédiatement après lui. Ces mêmes étoiles, les jours précédens, ne se couchaient que longtems après le soleil : cet astre s'est donc avancé vers elles *d'occident en orient*, en sens contraire du mouvement diurne. En effet, si vous observez le ciel le matin quelques instans avant le lever du soleil, vous reverrez les mêmes apparences en sens contraire. Les étoiles qui se lèvent aujourd'hui en même tems, ou presque en même tems que le soleil, se leveront longtems avant lui, dans quelques jours. Elles paraîtront s'éloigner de cet astre dans le ciel d'orient en occident, ou ce qui revient au même, il se sera éloigné d'elles d'occident en orient ; car il est plus simple de supposer au soleil un mouvement propre, que d'en supposer un général et commun à toutes les étoiles par rapport à lui. Par l'effet de ce mouvement propre, le soleil semble parcourir successivement tout le cercle du ciel en allant d'occident en orient.

5. Aussi en regardant le ciel la nuit, dans des saisons différentes, le trouve-t-on tout-à-fait changé. Ce ne sont plus les mêmes étoiles ; elles sont arrangées et disposées différemment. Ceci est une conséquence très-simple du mouvement propre du soleil. Dans la partie du ciel où il se trouve, la clarté de sa lumière nous empêche d'appercevoir les étoiles à la vue simple, car avec des lunettes on parvient à les voir même pendant le jour ; mais à mesure que le soleil s'éloigne de ces étoiles par l'effet de son mouvement propre, elles arrivent au-dessus de l'horison pendant la nuit et deviennent visibles. Nous découvrons

Digitized by Google

déja, dans cette circonstance, l'inexactitude des notions grossières que la première vue des phénomènes fait naître, et d'après lesquelles on serait tenté de croire que le ciel est partagé en deux portions qui paraissent sur l'horison successivement, et dont l'une est occupée par les étoiles, la seconde par le soleil. L'observation exacte et suivie des phénomènes célestes nous fera reconnaître bien d'autres illusions et nous apprendra à y renoncer.

Les seules étoiles situées du côté du nord, et qui ne se couchent point, restent constamment visibles au ciel la nuit, dans tous les tems; mais aux mêmes instans de la nuit on les voit successivement dans des positions différentes, selon leur situation par rapport au soleil, et en cela le mouvement propre de cet astre devient encore sensible.

6. Le mouvement propre du soleil n'est pas exactement dirigé d'occident en orient, car il est connu de tout le monde qu'en certains tems le soleil s'élève beaucoup plus sur nos têtes que dans d'autres, ce qui nous devient sur-tout sensible par les variations de sa chaleur, d'où résulte la différence des *saisons*. On s'en apperçoit aussi en observant les points de son lever et de son coucher, qui ne répondent pas toujours aux mêmes objets terrestres. Mais le premier mouvement propre du soleil, d'occident en orient, est le plus considérable, puisqu'il lui fait parcourir successivement tout le cercle du ciel, tandis que le second mouvement dont nous parlons paraît borné entre certaines limites d'élévation et d'abaissement que le soleil ne dépasse jamais. De tout cela il résulte que cet astre décrit dans le ciel une route oblique qui n'est pas tout-à-fait dirigée d'occident en orient, mais qui s'écarte de cette direction dans certaines limites déterminées.

7. Les mouvemens propres des planètes, par rapport aux étoiles, sont aussi dirigés comme celui du soleil d'occident

Digitized by Google

en orient, du moins dans une grande partie de leur cours. Car il arrive, à certaines époques déterminées et différentes pour chaque planète, que son mouvement propre se rallentit peu-à-peu, jusqu'à devenir enfin tout-à-fait insensible. Alors la planète paraît stationnaire parmi les étoiles. Après quoi son mouvement recommence, d'orient en occident, c'est-à-dire dans une direction opposée à ce qu'il était d'abord : ce qui fait que la planète, vue parmi les étoiles, semble *rétrograder*. Mais après quelque tems cette *rétrogradation* se rallentit ; la planète s'arrête, redevient une autre fois *stationnaire*, puis reprend parmi les étoiles son mouvement *direct* d'occident en orient. Ces phénomènes, observés dès la plus haute antiquité, se nomment les *stations* et *rétrogradations* des planètes.

Les mouvemens propres des planètes, comme celui du soleil, ne sont pas exactement dirigés d'occident en orient ; elles s'écartent de cette direction jusqu'à certaines bornes qu'elles ne dépassent jamais, et elles sont toutes comprises dans une zône du ciel que l'on a nommée *zodiaque*.

8. Enfin, on découvre de tems en tems dans le ciel quelques astres qu'on n'y appercevoit pas auparavant ; qui d'abord paraissent fort petits, peu brillans, et sont ordinairement accompagnés d'une sorte de nébulosité ou de *queue* lumineuse qui les accompagne. Ces astres ont aussi des mouvemens propres parmi les étoiles ; mais leur direction est très-variable, et ils traversent le ciel dans tous les sens. Il arrive assez ordinairement que leur éclat augmente depuis les premiers instans de leur apparition jusqu'à certaines limites, après quoi il diminue par les mêmes degrés ; et enfin, après un intervalle de tems plus ou moins considérable, on cesse de les appercevoir. La nébulosité qui les accompagne les a fait nommer *comètes*, c'est-à-dire *astres chevelus*.

Digitized by Google

9. Tous les astres dont nous venons de parler font l'objet de la science que l'on nomme Astronomie. Observer et déterminer exactement leurs positions dans le ciel, suivre leurs mouvemens, les mesurer avec précision, reconnaître les lois constantes auxquelles ils sont assujétis, et se servir ensuite de ces lois pour prédire leurs positions dans l'avenir, ou assigner celles qu'ils ont eues autrefois, voilà la marche et le but de l'Astronomie. Tel est aussi le sujet que nous nous sommes proposé dans la suite de cet Ouvrage.

10. On ne doit pas mettre au nombre des astres véritables ces météores lumineux dont l'apparition ne dure que quelques instans, qui ne sont visibles dans le ciel au lieu de leur départ qu'au moment où ils s'élancent, et qui ne laissent aucune trace dans la partie où ils vont s'évanouir. Tels sont les globes de feu qui se montrent par fois subitement dans l'espace, suivis d'une queue enflammée, lançant des flammèches brillantes, et qui, après quelques instans d'une course très-rapide, éclatent souvent avec un grand bruit. Tel est encore le météore instantané que le vulgaire nomme *étoiles filantes*, et qui paraît avoir beaucoup de rapport avec le précédent. Ces phénomènes ont été pendant longtems regardés comme des effets purement physiques, produits par des vapeurs répandues dans l'air, et qui s'enflammaient accidentellement par des causes que l'on ignore; mais depuis peu on a eu de fortes raisons de penser qu'ils sont également du ressort de l'Astronomie, quoique le peu de durée de leur apparition suffise pour les distinguer des astres permanens qui font l'objet spécial de cette science. Nous expliquerons plus loin les motifs de cette opinion, ainsi que les idées les plus probables que l'on peut se former sur la nature et la cause de ces *météores*.

Digitized by Google

CHAPITRE II.

De la Rondeur de la Terre.

11. Nous venons d'exposer les phénomènes les plus apparens que présente le ciel pour un observateur isolé; mais parmi ces phénomènes, celui du lever et du coucher des astres est un des plus singuliers et mérite d'attirer d'abord notre attention. Qu'est-ce donc que cette limite qui nous cache la moitié du ciel et que nous avons appelée l'horison? Est-elle la même pour les divers pays, ou est-elle différente? Est-il possible de l'atteindre, et que trouve-t-on au-delà?

Toutes ces questions, et beaucoup d'autres encore, se résolvent aisément par les voyages, sur-tout par les voyages maritimes. Lorsque les navigateurs s'éloignent du rivage, ils voient les édifices et les montagnes s'abaisser peu-à-peu, et enfin disparaître comme s'ils s'enfonçaient dans les eaux. Cet effet n'est pas dû à l'éloignement, qui fait paraître les objets plus petits; car lorsqu'on perd la terre de vue sur le pont du navire, on l'apperçoit encore du haut des mâts. Pendant ce tems le navire offre les mêmes apparences aux spectateurs qui sont restés sur le rivage; ils le voient s'abaisser peu-à-peu, et enfin disparaître comme s'il se plongeait dans l'océan, et précisément de la même manière que le soleil à son coucher. Ces phénomènes, qui s'observent constamment et dans toutes les directions, prouvent avec évidence que la surface des mers est convexe, et nous cache par sa rondeur les objets éloignés. Car si cette surface était plate, une montagne isolée,

Digitized by Google

ou même une tour élevée au-dessus d'elle, serait toujours apperçue de toutes parts, à moins que les spectateurs ne fussent assez éloignés pour que les dimensions de la montagne ou de la tour devinssent insensibles à cause de la distance ; mais cela ne pourrait arriver qu'à des distances très-considérables. La base des objets élevés ne disparaîtrait pas plutôt que leur sommet ; ils ne sembleraient pas s'abaisser successivement ; et enfin lorsqu'on cesserait de les appercevoir de dessus le pont du navire, on ne les découvrirait pas mieux du haut des mâts.

L'horison de la mer, qui semble terminer sa surface, n'est donc pas une limite réelle, mais une limite apparente relative à la position de l'observateur, et produite par la convexité de la surface des eaux. Les navigateurs que nous voyons partir du rivage nous semblent aller au-delà de cette limite, mais leur horison se déplace avec eux. Lorsqu'ils ont disparu pour nous, élevons-nous sur une montagne près du bord de la mer, et nous reverrons encore pour quelque tems le même navire qui nous avait paru se plonger dans les eaux.

C'était un projet hardi et important de reconnaître ce que devient cette barrière apparente lorsque l'on s'avance toujours vers elle en allant dans le même sens. Ferdinand Magellan, portugais de nation, est le premier qui ait réalisé cette entreprise. Il s'embarqua sur l'océan, et partant d'un des ports du Portugal, se dirigea vers l'occident. Après un long trajet, il remonta une grande terre déja découverte précédemment par d'autres navigateurs qui avaient suivi la même route ; c'était le *continent d'Amérique*. N'ayant point trouvé de passage pour continuer sa route vers l'occident, il côtoya cette terre en se dirigeant vers le sud, parvint à son extrémité, la doubla, et se trouva ensuite dans une grande mer déja connue,

Digitized by Google

que l'on nomme la *mer du Sud.* Alors il poursuivit sa route vers l'occident; après un trajet considérable il aborda aux îles Moluques, et son vaisseau marchant toujours vers l'occident, retrouva enfin l'Europe, et rentra, comme s'il était venu de l'orient, dans le port d'où il était parti.

12. Cette grande expérience, répétée depuis par plusieurs navigateurs, prouve que la surface totale des eaux et de la terre est convexe, rentrante sur elle-même, et que le ciel ne lui est adhérent nulle part. Aussi, dans quelque pays qu'on se transporte, voit-on toujours le système général des astres tourner autour de la terre par l'effet du mouvement diurne.

13. De là on doit conclure que le ciel ne s'appuie pas sur l'horison de la mer, comme on le croirait en le regardant. Cette illusion vient de ce que nous supposons toujours les objets dans la direction des rayons visuels qui les rendent sensibles à nos yeux. Lorsque les rayons venus d'une étoile rasent la surface de la mer, il nous semble que l'étoile est aux extrémités de cette surface. Si l'on conçoit un plan qui passe par l'œil du spectateur et qui touche l'horison de la mer, tous les points du ciel situés dans ce plan doivent nous paraître contigus à la surface des eaux, comme si le ciel reposait dessus.

14. Ces résultats ne font connaître la rondeur de la terre que dans un seul sens, d'occident en orient; elle est également sensible du nord au sud, et c'est ce que font aussi connaître les voyages maritimes entrepris dans cette direction. Sur la terre il est difficile de faire cette remarque, parce que l'horison étant presque toujours terminé par des montagnes plus ou moins élevées, on peut supposer que ce sont elles qui nous cachent ce qui est au-delà. Mais on peut suppléer à ces preuves par une considération plus générale, puisqu'elle s'applique à la

Digitized by Google

terre comme à la mer. Cette considération est fondée sur ce que les mêmes étoiles atteignent sur l'horison des hauteurs différentes à mesure que l'on change de lieu. Par exemple, lorsqu'on part d'un lieu quelconque de la terre et qu'on s'avance vers le sud, on voit les étoiles situées dans cette partie du ciel s'élever de plus en plus sur l'horison. Les arcs qu'elles décrivent par l'effet du mouvement diurne sont plus étendus. Quelques-unes mêmes que l'on n'appercevait pas dans le pays que l'on quitte commencent à se montrer. Au contraire les étoiles situées vers le nord s'abaissent : celles qui décrivent un arc très-bas ont disparu et sont cachées sous l'horison, précisément comme dans les voyages maritimes les édifices et les montagnes s'abaissent et disparaissent à mesure qu'on s'éloigne. Les mêmes phénomènes se présentent en sens contraire lorsqu'on marche du sud au nord. En changeant ainsi de lieu sur la terre, et marchant toujours du nord au sud, ou du sud au nord, on peut en quelque sorte changer de ciel. Ces phénomènes indiquent encore avec la plus grande évidence la convexité de la terre. Les étoiles sont ici par rapport à nous ce que sont les édifices et les montagnes par rapport au navigateur qui s'éloigne du rivage. La seule différence vient de ce que la vue du navigateur est libre de toutes parts, tandis que sur terre la nôtre est limitée ; ce qui nous force de recourir à des signaux célestes pour nous élever au-dessus des obstacles situés sur la surface terrestre, et qui nous cachent sa convexité. C'est par une raison semblable que les points les plus élevés de la terre, comme le haut des montagnes et le sommet des tours, reçoivent d'abord le matin la lumière du soleil, et sont éclairés le soir de ses derniers rayons. Par une conséquence nécessaire, lorsque cet astre se couche pour certains pays, il paraît au plus haut point de sa course pour des

Digitized by Google

contrées plus avancées vers l'occident, tandis qu'il se lève pour d'autres qui sont encore au-delà.

15. La rondeur de la terre se manifeste encore d'une manière très-frappante dans plusieurs phénomènes que présente la lune ; mais ceci exige quelques notions préliminaires pour être entendu. On sait que la lune éprouve, dans l'étendue et l'éclat de sa lumière, des variations très-sensibles auxquelles on a donné le nom de *phases*. Elle paroît successivement sous la forme d'un *croissant*, d'un *demi-cercle*, d'un *cercle* parfait, après quoi son disque s'échancre et diminue peu-à-peu, comme il a augmenté. Ces variations *périodiques*, c'est-à-dire, qui se succèdent toujours dans le même ordre, ont des rapports si frappans avec la position du soleil, qu'il en résulte avec évidence que la lune est un corps arrondi et opaque que le soleil éclaire; et dont la face tournée vers nous, tantôt éclairée, tantôt obscure, ou en partie l'une et l'autre, selon la situation du soleil, offre toutes les apparences que nous observons. En effet, cette supposition représente si naturellement les apparences, comme nous le ferons voir par la suite, qu'il devient impossible d'en douter.

La lune n'étant point lumineuse par elle-même, mais par la seule lumière qu'elle reçoit du soleil, s'il arrive que par l'effet de son mouvement propre, elle vienne à passer entre cet astre et la terre, il est évident qu'elle doit nous le cacher en tout ou en partie. C'est en effet exactement ce qui a lieu. La lune paroît alors sur le disque du soleil comme une tache noire, et nous empêche de voir cet astre, ou au moins nous prive d'une partie de sa lumière. Ce phénomène s'appelle une *éclipse de soleil*.

Quelquefois aussi on voit la lune s'obscurcir tout-à-coup dans le ciel, et dans l'intervalle de quelques heures perdre et reprendre successivement sa lumière. Le bord de

Digitized by Google

son disque qui disparaît, le premier est aussi le premier à reparaître, précisément comme il arriverait à un corps opaque et éclairé par un flambeau, s'il entrait dans l'ombre projetée par un autre corps. Ce phénomène que l'on nomme une *éclipse de lune*, n'arrive jamais que dans le tems où la lune paraît entièrement éclairée et opposée au soleil. Il est naturel d'en conclure que la terre éclairée d'un côté par le soleil projette derrière elle, dans l'espace, une ombre dans laquelle la lune pénètre lorsqu'elle s'éclipse.

C'est la forme de cette ombre projetée sur le disque de la lune qui rend sensible la rondeur de la terre. Lorsque la lune commence à y pénétrer, la plus grande partie de son disque est encore éclairée par le soleil. Cette partie lumineuse ne paraît pas terminée par une ligne droite, comme cela arriverait si le contour de l'ombre terrestre était rectiligne. Elle a la forme d'un croissant, dont la convexité est tournée vers la partie éclairée de la lune. Cette convexité indique évidemment la rondeur de l'ombre, et par conséquent la rondeur de la terre qui la projette. La même apparence se reproduit encore lorsque la lune commence à se dégager de l'ombre terrestre.

16. En réunissant les résultats de ces observations avec ce qu'ont appris les voyages maritimes, on peut conclure avec certitude que *la terre et les eaux forment une masse arrondie dans tous les sens et isolée dans l'espace.*

17. Quoique cette conclusion soit très-certaine, puisqu'elle repose sur des faits bien constatés, on a peine à concevoir que la terre soit ainsi isolée et soutenue d'elle-même au milieu de l'espace. Cela vient de ce que nous généralisons ici mal-à-propos l'idée de la pesanteur que nous remarquons dans les corps situés à la

Digitized by Google

surface de la terre. Il n'en résulte pas que la terre elle-même doive tendre vers tel ou tel point de l'espace. Ainsi, lorsque l'observation nous apprend qu'elle se soutient d'elle-même, libre et isolée, il n'y a rien, dans les phénomènes de la pesanteur, qui doive nous porter à en être surpris.

18. Bien plus, puisque la terre est arrondie, les divers peuples qui l'habitent ont la tête tournée vers différens points du ciel. Il en est donc qui nous sont absolument opposés, et dont les pieds sont aussi opposés aux nôtres. On les nomme pour cette raison *antipodes*, et chaque pays a les siens. Cette disposition paraît très-singulière, mais elle n'en est pas moins réelle. J'ai placé ici ces considérations pour montrer qu'il ne faut pas s'étonner des vérités nouvelles que l'observation et l'expérience font découvrir. La surprise qu'elles causent vient ordinairement de ce que nous regardons comme des choses générales celles auxquelles nous sommes accoutumés. C'est là un préjugé dont il faut se défaire, et qui se dissipe à mesure que l'on acquiert l'habitude d'observer.

Au reste, lorsque nous serons plus avancés en Astronomie, la rondeur de la terre ne nous offrira plus rien d'extraordinaire ; car en observant les astres avec des télescopes qui aggrandissent beaucoup leurs images, on a remarqué sur plusieurs d'entre eux des phénomènes qui prouvent aussi leur rondeur. De ce nombre sont le soleil, la lune et les planètes. La rondeur de la terre, qui paroît si singulière au premier coup-d'œil, n'est qu'une propriété qui lui est commune avec beaucoup d'autres corps isolés comme elle dans l'espace infini des cieux.

19. La terre étant convexe, les perpendiculaires menées aux divers points de sa surface ne sont pas parallèles entre elles ; elles convergent vers son intérieur,

Digitized by Google

Voy. *fig.* 2. Si elles se croisaient toutes au même point, la terre serait sphérique. Généralement, la manière dont elles s'inclinent les unes sur les autres indique la forme de la courbure; car si l'on conçoit une ligne droite flexible *A B' fig.* 1, à laquelle on mène plusieurs perpendiculaires *Pp*; *P'p'*; *P''p''*; aux points *M M' M''*, tant que cette ligne restera droite, les perpendiculaires seront parallèles entre elles. Mais si elle vient à se courber, comme dans la *fig.* 2, les perpendiculaires se rapprocheront les unes des autres vers l'intérieur de la courbe; elles s'écarteront du côté opposé, et ce changement de direction sera d'autant plus marqué que la courbure sera plus forte. La direction de ces perpendiculaires est donc une chose très-nécessaire à déterminer relativement à la surface terrestre. Elles sont indiquées, dans chaque lieu, par la direction que prennent les corps graves, abandonnés librement à l'action de la pesanteur; car c'est un résultat d'observation que la chûte des corps se fait toujours perpendiculairement à la surface des eaux tranquilles, qui indique partout la forme de la surface terrestre, abstraction faite de ses inégalités.

20. Cependant comme ce résultat est la base de toutes les connaissances que l'on a acquises sur la figure de la terre et les mouvemens célestes, il importe de savoir qu'on peut en démontrer la vérité par un raisonnement rigoureux. L'expérience prouve que les molécules de l'eau sont pesantes comme celles de tous les autres corps. Si nous supposons inconnue la direction de la pesanteur, il n'en est pas moins sûr que cette force pousse chacune d'elles dans une certaine direction. Ainsi lorsqu'on voit qu'elles sont en équilibre, c'est une preuve qu'elles se sont disposées de manière à ne pouvoir plus céder à l'action de la pesanteur; en sorte que les molécules de la surface,

Digitized by Google

par exemple, soient soutenues par l'incompressibilité des molécules de l'intérieur. Pour cela, il est de toute nécessité que la direction de la pesanteur soit perpendiculaire à la surface supérieure de la masse d'eau ; car si elle était oblique, les particules d'eau qui s'y trouvent, glisseraient sur cette surface, sans que celles de l'intérieur pussent les retenir, et l'équilibre ne subsisterait pas. *La direction de la pesanteur est donc partout perpendiculaire à la surface des eaux tranquilles*, et ce résultat est tout-à-fait indépendant des hypothèses que l'on peut faire sur la figure de la terre. Seulement, si elle est sphérique, toutes les directions de la pesanteur concourent à son centre et indiquent la direction des rayons.

21. Pour reconnaître cette direction par expérience, on suspend un corps grave à l'extrémité inférieure d'un fil, dont l'autre bout est fixe. Ce fil se dirige suivant une ligne perpendiculaire à la surface terrestre. Cet appareil se nomme un *fil à-plomb*. La perpendiculaire ainsi déterminée se nomme une *verticale*. Le point du ciel qui répond directement au-dessus d'elle s'appelle le *zénith*. Le point opposé, situé de l'autre côté de la terre, s'appelle le *nadir*. Ces deux mots sont arabes. Ils désignent les deux points opposés du ciel que la verticale rencontrerait par son prolongement.

22. Puisque toutes les verticales convergent vers l'intérieur de la terre, leurs directions sont différentes, mais cette différence n'est pas appréciable dans des lieux peu éloignés les uns des autres, et les directions du fil à-plomb y sont sensiblement parallèles. Cela nous paraît ainsi, parce qu'elles ne font entre elles qu'un très-petit angle, la convexité de la terre ne pouvant pas être sensible sur un si petit espace.

Par une conséquence de cette convexité, à mesure

Digitized by Google

que l'on s'élève au-dessus de la surface terrestre, par exemple, sur des montagnes ou en aérostat, on doit découvrir une plus grande partie de cette surface, et les rayons visuels, menés aux extrémités de l'horison, doivent s'incliner de plus en plus sur la verticale. C'est ce que l'expérience confirme, et ce dont tout le monde a pu fréquemment s'assurer (*).

23. L'abaissement des objets éloignés étant différent suivant les hauteurs où l'on est placé, l'étendue de l'horison varie avec les hauteurs. Elle se réduirait même à un point mathématique si l'on pouvait se figurer un observateur, dont l'œil fût placé à la surface même de la mer. Pour conserver l'exactitude des expressions parmi ces irrégularités, on est convenu, en astronomie, d'appeler *horison* un plan mené, par l'œil de l'observateur, perpendiculairement à la verticale. Ce plan est supposé indéfini et prolongé en tous les sens. Dans la *fig.* 3, *H o h* représente l'horison, et l'angle *H o H'*, inclinaison du rayon visuel au-dessous de ce plan, s'appelle la *dépression apparente*. Cet angle est toujours beaucoup plus petit qu'il ne paraît ici dans la figure où l'on a été obligé, pour le rendre sensible, d'exagérer les dimensions de la montagne comparativement à celles de la terre (**).

(*) La montagne du Mongo, en Espagne, sur les bords de la Méditerranée, élevée de 727 mètres, s'apperçoit de la mer comme une petite île à 20 lieues de distance; et réciproquement, du haut du Mongo, on découvre, à 20 lieues dans l'éloignement, les îles d'Iviza et de Formentera, qui, du rivage, ne sont pas visibles. Au Mexique, la cime toujours neigée du pic d'Orizava, qui a 5305 mètres de hauteur, se découvre, suivant M. de Humboldt, à une distance de 60 lieues. Un observateur placé sur le pic, verrait donc aussi son horison s'étendre à 60 lieues autour de lui.

(**) En supposant la hauteur de la montagne égale à celle du

Digitized by Google

24. Lorsqu'on change de lieu sur la terre, le sommet de la verticale répond successivement à divers points du ciel, et l'on voit au zénith des étoiles différentes. Le plan de l'horison qui est toujours perpendiculaire à la verticale prend donc aussi, dans l'espace, toutes les directions possibles; c'est une conséquence nécessaire de la rondeur de la terre.

25. Si l'on conçoit un rayon visuel mené du point *O* ou de l'œil de l'observateur à un astre *S*, *fig.* 3, l'angle *S O Z*, formé par ce rayon avec la verticale *O Z*, se nomme la *distance de l'astre au zénith*, et le complément de cette distance, ou *H o S*, s'appelle la *hauteur de l'astre sur l'horison*, ou simplement la *hauteur*. Pour les objets situés au-dessous du plan de l'horison, comme *H'*, la distance au zénith devient plus grande qu'un angle droit. Nous verrons plus tard comment on obtient la mesure de ces angles, avec la dernière exactitude, à l'aide d'instrumens divisés.

26. Des observations précises et multipliées dans tous les sens ont appris que la surface de la terre est presque sphérique. On est même parvenu à mesurer très-exactement la différence de sa courbure à celle d'une sphère, mais ces résultats supposent des procédés que nous ne pouvons pas encore exposer. Notre but, dans ce chapitre, a été de faire connaître et de prouver, par les phénomènes, que la terre est *arrondie et isolée dans l'espace*; car la connaissance de cette importante vérité devait précéder jusqu'à l'idée même de mesurer géométriquement sa courbure.

Chimboraço, et la représentant par deux millimètres, comme on l'a fait ici dans la figure, il faudrait, pour conserver les proportions, donner à la terre un rayon égal à $2^m,864$ ou environ 8 pieds.

Digitized by Google

CHAPITRE III.

De l'Atmosphère.

27. La terre est partout couverte d'un fluide rare et transparent, que l'on nomme l'*air*, et dont la totalité forme autour d'elle une enveloppe que l'on appelle l'*atmosphère*. C'est au travers de cette enveloppe que nous voyons les astres; il est donc nécessaire d'étudier sa nature et d'examiner l'influence que son interposition peut avoir sur les apparences que nous observons.

L'air est beaucoup plus léger que la plupart des autres corps, mais cependant il n'est pas dépourvu de pesanteur. Un ballon de verre dans lequel on a fait le vide, pèse moins que lorsqu'il est rempli d'air.

L'air est compressible, c'est-à-dire qu'en pressant une masse d'air, on peut lui faire occuper des espaces successivement moindres. Il est élastique, c'est-à-dire qu'il tend à reprendre son volume primitif, lorsqu'il a été comprimé.

On peut en donner pour exemple une vessie gonflée que l'on presse entre les mains; un ballon gonflé qui bondit sur la terre.

28. La constitution de l'atmosphère étant un résultat nécessaire de ces propriétés physiques, il est aisé de l'en conclure. Puisque l'air est pesant, les couches inférieures de l'atmosphère sont plus comprimées que les supérieures dont elles supportent le poids. Mais, en vertu de leur élasticité, elles doivent résister à cette pression, et faire effort pour s'étendre. Par conséquent, si l'on prenait un

Digitized by Google

certain volume d'air à la surface de la terre, et qu'on le portât plus haut dans l'atmosphère, il devroit s'y dilater, c'est-à-dire, y former un volume plus considérable. L'expérience en a été faite. On a pris une vessie à demi pleine d'air, à la surface de la terre; on l'a fermée avec soin, et on l'a portée sur le sommet d'une haute montagne (le Puy-de-Dôme). A mesure que l'on s'élevoit, la vessie se gonflait par la dilatation de l'air. Au haut de la montagne, elle parut toute pleine. En descendant, elle se désenfla peu-à-peu, et rapportée au lieu du départ, elle se trouva flasque comme auparavant. Cette expérience a été répétée depuis, un grand nombre de fois.

29. Tout le monde sait que si l'on plonge dans un liquide un tube ouvert par les deux bouts, quand on aspire l'air par l'extrémité supérieure du tube, le liquide monte au-dessus du niveau. C'est un effet de la pression de l'air. Avant l'expérience, tous les points de la surface du liquide étaient également pressés par les colonnes d'air situées au-dessus d'eux. Quand on aspire l'air du tube, les molécules du liquide qui se trouvent dans son intérieur, sont déchargées en partie du poids qu'elles supportaient, et tous les points de la surface ne se trouvant plus pressés également, le liquide doit s'élever du côté où la pression est moindre. Cette ascension doit se continuer jusqu'à ce que le poids de la colonne du liquide élevée dans le tube, jointe à l'élasticité de l'air qui y était resté, forme une pression égale à celle de l'air extérieur. Alors tous les points situés à la surface du liquide, étant pressés également, il n'y a pas de raison, pour qu'ils se mettent en mouvement d'un côté ou d'un autre, et par conséquent l'équilibre doit subsister.

On voit donc que s'il était possible d'ôter tout l'air contenu dans l'intérieur du tube, le liquide s'y éleverait

Digitized by Google

jusqu'à ce que son poids seul fît équilibre à la pression de l'atmosphère. Ainsi, en pesant la colonne de liquide, on aurait la mesure exacte de cette pression.

On parvient à ce but d'une manière fort simple. On prend un tube de verre fermé par un des bouts ; on le remplit de liquide, et après avoir fermé très-exactement, avec le doigt, son orifice ouvert, on le renverse ; on le plonge par cette extrémité dans un vase découvert et rempli de la même liqueur. Alors, si le tube est assez grand, le liquide s'abaisse de lui-même dans son intérieur, jusqu'à faire équilibre à la pression de l'atmosphère.

Il est clair que plus le liquide sera pesant, plus la colonne comprise dans l'intérieur du tube, sera courte. Pour éviter les longs tubes, on emploie ordinairement le mercure, qui est le plus pesant de tous les liquides connus. On voit l'appareil de cette expérience dans la *fig.* 4. Cet appareil, par le grand nombre de ses applications, est devenu d'un très-grand usage, et on lui a donné le nom de *baromètre*, qui signifie mesure de la pesanteur. J'indiquerai plus loin, les précautions indispensables qu'il faut prendre pour vérifier cet instrument, et pour mesurer exactement la hauteur de la colonne de mercure élevée au-dessus du niveau.

30. Cette hauteur, et par conséquent la pression de l'atmosphère dont elle donne la mesure, ne reste pas toujours la même, dans le même lieu. Elle éprouve des élévations et des abaissemens qui paraissent tenir aux modifications de l'atmosphère, mais dont la cause est encore inconnue. L'étendue de ces variations n'est pas partout la même. Elles sont presque nulles sur les hautes montagnes, et dans les pays où l'état de l'air n'éprouve que de légers changemens. En général, elles ne sont jamais très-considérables dans les tems calmes ; mais presque toujours

Digitized by Google

le baromètre descend rapidement avant les tempêtes, et il éprouve de grandes oscillations quand elles ont lieu; ce qui en fait un instrument très-utile à la mer pour les navigateurs instruits. La hauteur moyenne du mercure dans le baromètre, au niveau des mers, est partout à fort peu près la même. Cependant on croit y avoir reconnu de légères différences. Au niveau de l'océan, cette hauteur moyenne est de $0^m,7629$ (28 pouces $2^l,2$), la température étant à 12°,8 du thermomètre centigrade. A Paris, au niveau de la Seine, elle est de $0^m,76$ (28^p $0^l,9$) et varie entre $0^m,73$ et $0^m,78$: la température moyenne est de 12°.

31. Le mercure doit s'abaisser dans le baromètre à mesure que l'on s'élève, puisque la surface de ce liquide, exposée à la pression de l'atmosphère, se trouve déchargée du poids de l'air inférieur. Pour calculer ces abaissemens, il faut connaître le poids d'un volume donné d'air au niveau des mers. Or, nous avons trouvé, Arago et moi, par des expériences exactes, qu'à la température de la glace fondante, et lorsque la hauteur du mercure dans le baromètre est de 76 centimètres, le poids de l'air est à celui du mercure dans le rapport de 1 à 10477,9; c'est-à-dire que 10477,9 millimètres cubes d'air pèsent autant que 1 millimètre cube de mercure. Ainsi, dans ces circonstances, en s'élevant de 10477,9 millimètres, ou ce qui est la même chose, de $10^m,4779$ au-dessus du niveau de la mer, le mercure baissera de 1 millimètre. Si l'atmosphère avait, dans toute sa hauteur, la même densité qu'au niveau des mers, il serait aisé, d'après cela, de calculer son épaisseur totale; car si un millimètre de mercure répond à $10^m,4779$ de hauteur, soixante-seize centimètres donneront 760 fois $10^m,4779$ ou 7963 mètres. Mais la compressibilité de l'air rend ce résultat très-différent de la vérité, et la densité des couches inférieures de

Digitized by Google

l'atmosphère doit surpasser de beaucoup celle des couches supérieures. Cela devient sensible sur les hautes montagnes, et lorsqu'on s'élève en aérostat à de grandes hauteurs. L'air devient si rare que l'on a beaucopp de peine à respirer. Aussi, pour faire baisser le mercure d'un millimètre, il ne suffit plus alors de s'élever de $10^m,5$. Il faut une différence de hauteur bien plus considérable. On démontre par le calcul qu'en supposant la température de l'air partout la même, les hauteurs du mercure dans le baromètre diminuent en progression géométrique, lorsque les élévations, au-dessus du niveau des mers, croissent en progression arithmétique. Ce résultat est modifié par le froid qui règne dans les hautes régions de l'air, et qui augmente leur densité; car l'air se resserre par le froid et se dilate par la chaleur. Mais en faisant à la règle générale les modifications nécessitées par ces circonstances, on est parvenu à calculer la hauteur d'un lieu au-dessus du niveau de la mer, ou en général au-dessus d'un autre lieu, d'après la seule observation du baromètre, résultat très-utile à la géographie (*).

32. L'abaissement progressif du mercure dans le baro-

(*) Soit, en général, X la différence de niveau que l'on veut mesurer; nommons H la hauteur du mercure dans le baromètre à la station inférieure; T, la température de l'air et du baromètre dans cette station; soient h et t les quantités analogues pour la station supérieure, où l'air est plus rare et la température plus froide : on aura, à fort peu près,

$$X = 18393^m \left\{ 1 + \frac{2.(T+t)}{1000} \right\} Log \frac{H}{h \left\{ 1 + \frac{(T-t)}{5412} \right\}}.$$

La formule exacte qui renferme la solution du problème est due à M. Laplace. On la trouvera à la fin du livre, dans la note 1re.

Digitized by Google

mètre, et tous les phénomènes produits par la rareté de l'air à mesure qu'on s'élève, s'observent également dans tous les pays de la terre. Il faut nécessairement en conclure que l'atmosphère terrestre forme autour de la terre une enveloppe qui l'embrasse de toutes parts, et dont la densité diminuant avec la hauteur, finit par devenir tout-à-fait insensible à une hauteur qui n'est pas très-considérable (*). Ainsi la masse arrondie de la terre, entourée de son atmosphère comme d'une couche de peu d'épaisseur, *existe dans l'espace isolée et dans le vide*; vérité bien curieuse à connaître, et que les préjugés nés de nos habitudes rendraient tout-à-fait incroyable, si nous n'y étions conduits par la force irrésistible de la raison appliquée à des faits vrais et bien observés.

(*) Pour nous convaincre de cette vérité, cherchons, par la formule barométrique, la hauteur à laquelle il faudrait s'élever dans l'atmosphère, pour n'avoir plus que 1 millimètre de pression. Faisons $H = 0{,}76$, $h = 0{,}001$, et comme il ne s'agit ici que d'une approximation, négligeons la correction de température, c'est-à-dire, supposons $T + t = 0$. On aura alors $X = 18393 . L. \left\{ \frac{760}{1} \right\}$, ce qui donne, en effectuant le calcul, $X = 52986^m$, ou 27186 toises, car $1^m = 0^t{,}513074$, comme on le verra plus bas. C'est environ 12 lieues, en supposant la lieue de 2280 toises. On verra plus loin que le rayon de la terre, supposée sphérique, est de 1432 lieues. Ainsi, à une distance de la terre qui n'est pas la centième partie du rayon terrestre, la rareté de l'air est égale au vide que nous pouvons faire dans nos meilleures machines pneumatiques. Encore cette évaluation est-elle plutôt trop forte que trop faible; car il n'y a pas de doute qu'à ces hauteurs $T + t$ deviendrait négatif, à cause du froid excessif qui règne dans ces régions de l'air, de sorte que la correction barométrique diminuerait encore la hauteur que nous venons de calculer. Mais ce résultat suffit pour montrer que la densité de l'atmosphère devient déja insensible à une très-petite distance de la terre.

Digitized by Google

33. Cherchons maintenant l'influence que l'interposition de l'atmosphère peut avoir sur l'observation des phénomènes célestes. Pour la connaître, étudions l'action de l'air sur la lumière ; car c'est uniquement par les rayons lumineux qu'ils nous envoient que les astres deviennent sensibles pour nous.

L'air, malgré sa transparence, intercepte sensiblement la lumière, et la réfléchit comme tous les autres corps. Mais les particules qui le composent étant extrêmement petites et très-écartées les unes des autres, on ne peut les appercevoir que lorsqu'elles sont réunies en grande masse. Alors la multitude des rayons lumineux qu'elles nous envoient produit sur nos yeux une impression sensible, et nous voyons que leur couleur est bleue. En effet, l'air donne une teinte bleuâtre aux objets entre lesquels il s'interpose. Cette teinte colore très-sensiblement les montagnes éloignées, et elle est d'autant plus forte qu'elles sont plus distantes de nous. Aussi pour peindre les objets éloignés faut-il diminuer leur éclat, ou, suivant l'expression reçue, les *éteindre* et affaiblir leurs couleurs propres par une teinte générale de bleu plus ou moins foncée. C'est encore la couleur propre de l'air, qui forme l'azur céleste, cette voûte bleue qui paraît nous environner de toutes parts, que le vulgaire appelle le ciel, et à laquelle tous les astres paraissent attachés. A mesure que l'on s'élève dans l'atmosphère, cette couleur devient moins brillante. La clarté qu'elle répand diminue avec la densité de l'air qui la réfléchit, et sur le sommet d'une haute montagne, ou dans un aérostat fort élevé, le ciel paraît presque noir.

34. L'air n'est pas lumineux par lui-même, car il ne nous éclaire point pendant l'obscurité. La lumière qu'il nous envoie lui vient du soleil et des astres. Sa couleur

Digitized by Google

prouve qu'il réfléchit les rayons bleus en plus grande quantité que les autres ; car on sait par expérience que la lumière est composée de rayons différens, qui produisent sur nos yeux la sensation de diverses couleurs, et ce que l'on nomme la couleur d'un corps n'est que celle des rayons qu'il nous réfléchit. L'air est donc autour de la terre comme une sorte de voile brillant, qui multiplie et propage la lumière du soleil par une infinité de répercussions. C'est par lui que nous avons le jour lorsque le soleil ne paraît pas encore sur l'horison. Après le lever de cet astre, il n'y a pas de lieu si retiré, pourvu que l'air puisse s'y introduire, qui n'en reçoive de la lumière, quoique les rayons du soleil n'y arrivent pas directement. Si l'atmosphère n'existait pas, chaque point de la surface terrestre ne recevrait de lumière que celle qui lui viendrait directement du soleil. Quand on cesserait de regarder cet astre, ou les objets éclairés par ses rayons, on se trouverait aussitôt dans les ténèbres. Les rayons solaires, réfléchis par la terre, iraient se perdre dans l'espace, et l'on éprouverait toujours un froid excessif. Le soleil, quoique très-près de l'horison, brillerait de toute sa lumière ; et immédiatement après son coucher, nous serions plongés dans une obscurité absolue. Le matin, lorsque cet astre reparaîtrait sur l'horison, le jour succéderait à la nuit avec la même rapidité.

On peut juger de ces conséquences par ce que l'on éprouve déja sur les hautes montagnes, où l'air est d'une rareté extrême. Il y règne un froid insupportable. A peine y reçoit-on d'autre lumière que celle qui vient directement du soleil et des astres. La clarté que l'air peut réfléchir à ces hauteurs est si faible que lorsqu'on est placé à l'ombre on voit les étoiles en plein jour.

35. Au contraire, par l'effet de l'atmosphère, les

Digitized by Google

rayons du soleil éclairent tout le ciel, et se répandent dans tous les sens par des réflexions multipliées. Le soir, lorsque le soleil a quitté l'horison, les régions élevées de l'atmosphère nous renvoient encore sa lumière, et par suite de ce phénomène, que l'on nomme *crépuscule du soir*, nous ne passons que peu-à-peu, et par une gradation insensible, du jour à l'obscurité. La même chose a lieu le matin vers l'orient, lorsque le soleil est encore sous l'horison : sa lumière réfléchie et répandue par l'atmosphère, forme l'*aurore*, ou le *crépuscule du matin*.

36. La durée de ces phénomènes dépend donc de la hauteur de l'atmosphère, ou pour parler plus exactement, de celle des parties de l'air dont la densité est encore assez grande pour renvoyer une lumière sensible. Aussi cette durée varie-t-elle avec l'état de l'air ; elle est en général plus grande lorsque l'atmosphère a été plus dilatée par la chaleur. C'est pour cela que le crépuscule du soir est plus long que le crépuscule du matin. L'observation de ces phènomènes a donné quelques notions sur l'épaisseur de la couche d'air qui nous environne, et il en résulte qu'elle est très-petite, par comparaison avec les dimensions de la terre (*). Je ferai connaître plus loin les calculs sur lesquels ce résultat est fondé ; mais nous pouvons dès à-présent l'adopter, car la diminution progressive de la densité de l'air, et l'abaissement considérable qu'éprouve déja le baromètre sur les montagnes, nous ont déja conduits à la même conséquence.

La véritable dimension de l'atmosphère, par rapport à la terre, est représentée dans la *fig.* 5, telle qu'on

(*) D'après ces calculs, la hauteur des dernières particules d'air capables de nous réfléchir une lumière sensible, serait de 60000 mèt., ou environ $\frac{1}{200}$ du diamètre de la terre.

Digitized by Google

la conclut de la durée du crépuscule, comme nous le verrons par la suite. Cela suffit pour donner une idée du peu d'épaisseur de cette enveloppe.

37. L'air comme tous les autres corps diaphanes exerce sur les molécules de la lumière une attraction qui les dévie de leur route directe. Ce phénomène se nomme *réfraction*. Son intensité dans les mêmes circonstances augmente ou diminue proportionnellement à la densité de l'air. Etudions donc les causes qui peuvent faire varier cette densité.

38. C'est dans le sein de l'atmosphère que se forment les vents, les nuages, la pluie, les brouillards, la neige, la grêle et les autres *météores*. Les *vents* sont produits par l'air, qui se déplace avec plus ou moins de vîtesse. Les *nuages* sont des amas de vapeurs humides prêtes à se résoudre en eau : leur élévation au-dessus de la surface de la terre est ordinairement peu considérable, et le sommet des hautes montagnes en est souvent enveloppé. En se plaçant sur ces montagnes, ou s'élevant dans un aérostat, on se trouve quelquefois plongé dans ces nuages. C'est ainsi qu'on a reconnu qu'ils sont formés de vapeurs aqueuses. Comme ils nagent dans l'air par un excès de légèreté spécifique, ils doivent monter plus haut quand l'air est plus dense, et descendre quand il devient plus rare. On remarque en effet que leur hauteur augmente ou diminue, selon que le baromètre monte ou descend. Si, par une cause quelconque, un nuage vient à éprouver un refroidissement très-rapide, les vapeurs aqueuses qui le composent se condensent, non pas en eau liquide, mais en neige, en grêle ou en frimats.

Ces amas de vapeurs étant éclairés par le soleil, nous réfléchissent sa lumière plus fortement que l'air qui les environne, quoiqu'ils soient moins denses que lui. Cet astre les éclaire encore, lorsqu'il est déja pour nous

Digitized by Google

sous l'horison. Le matin ils recoivent ses rayons, avant que nous puissions l'appercevoir. Alors, la lumière qui les colore est rougeâtre comme celle que nous recevons du soleil couchant. Les sommets des hautes montagnes couvertes de neiges éternelles, présentent aussi un phénomène analogue résultant de la même cause. Ils paraissent aussi colorés en rose le matin et le soir, lorsque le ciel est serein.

39. Ce que nous venons de dire des neiges éternelles, nous conduit à parler d'une autre propriété bien importante de l'atmosphère : c'est que, dans tous les pays, lorsque l'on s'élève au-dessus de la surface de la terre, on voit la température de l'air décroître continuellement, jusqu'à atteindre et dépasser enfin le terme de la glace ; d'où l'on peut conclure que si on s'élevait davantage, elle continuerait à décroitre encore jusqu'à une limite qui nous est inconnue. C'est pour cela que, dans tous les pays où il y a de hautes montagnes, leur cime est couverte de neiges qui ne se fondent jamais, l'eau ne pouvant pas rester liquide à cette élévation. En général, quand les hauteurs sont peu considérables, le décroissement de la température se fait sensiblement en progression arithmétique, proportionnellement aux différences des hauteurs ; mais à de grandes élévations, il paraît qu'il suit d'autres lois plus rapides. Nous verrons par la suite ce que l'expérience a fait connaître de plus certain sur ce sujet, lorsque nous traiterons de la température de la terre ; mais, dès à présent, il était nécessaire d'en donner une idée précise.

40. En effet, la connaissance de ces propriétés est indispensable pour le calcul des observations astronomiques, à cause de l'influence qu'elles ont sur la densité des couches de l'atmosphère. L'air, en vertu de cette

Digitized by Google

densité inégale, et croissante de haut en bas, infléchit les rayons lumineux vers la terre, et nous fait voir les astres plus élevés sur l'horison qu'ils ne le sont réellement. Ce phénomène, qui se nomme *la réfraction astronomique*, altère donc toutes les positions apparentes des astres. Heureusement, il est susceptible d'être soumis à un calcul rigoureux; on trouve ainsi la quantité précise de cette inflexion, qui est différente selon la hauteur des astres sur l'horison, et qui, de plus, varie avec la pression de l'air et avec sa température. Mais il nous suffira, pour le moment, d'être averti de ces effets; quant à leur mesure précise et aux corrections qu'ils nécessitent, nous attendrons, pour en faire la recherche, que nous connaissions exactement les observations auxquelles ces corrections doivent s'appliquer.

41. L'atmosphère, interposée entre nous et les astres, est encore la source de beaucoup d'autres illusions que le vulgaire prend pour des réalités, mais que le physicien éclairé apprécie par ses observations, et redresse par son jugement.

Par exemple, tout le monde peut remarquer que la partie du ciel, qui est au-dessus de nos têtes, semble plus près que celle qui avoisine l'horison. On observe la même chose dans tous les pays: c'est une suite de la rondeur de l'atmosphère. La couche d'air qui la forme, et qui est concentrique à la terre, est coupée par notre horison en deux parties, l'une supérieure qui est visible, l'autre inférieure qui est cachée. Ces segmens sont inégaux, parce que nous sommes placés à la surface de la terre. Celui qui est au-dessus de nos têtes, est plus étendu dans le sens de l'horison que dans le sens de sa hauteur. Telle est la cause réelle de l'apparence qu'il nous présente. Voyez *fig.* 6, où *O* représente l'observateur, *H h* l'horison, et *H S h* la portion visible de l'atmosphère.

Digitized by Google

C'est pour cela que nos yeux supportent aisément la vue du soleil à son lever et à son coucher, au lieu que son éclat nous éblouit, lorsqu'il est élevé sur l'horison. Dans le premier cas, la lumière qu'il nous envoie traverse une plus grande épaisseur d'air, et d'un air plus dense. Une plus grande partie de cette lumière est donc interceptée, et c'est ce qui affaiblit son éclat. Il en est de même de tous les autres astres. Les vapeurs répandues dans l'air, près de la surface de la terre, augmentent beaucoup cet effet; car on voit quelquefois des brouillards assez épais, pour qu'on ne puisse plus distinguer un objet à quelques pas de distance. Notre position sur la surface terrestre, doit donc faire juger l'atmosphère plus alongée dans le sens de l'horison que vers le zénith.

42. Cette cause bien réelle est fortifiée par une autre qui n'est qu'apparente. La partie de l'atmosphère qui est au-dessus de nos têtes, ne nous offre aucun objet connu d'après lequel nous puissions apprécier sa profondeur. Au contraire, dans la couche d'air qui est près de l'horison, nous voyons des maisons, des forêts, des montagnes, et beaucoup d'autres objets sur l'existence et la grandeur desquels nous ne formons aucun doute. Leur présence nous prouve donc une succession de parties et un éloignement réel, dont l'idée est fortifiée par la dégradation de leur teinte. Nous jugeons ainsi que l'atmosphère doit s'étendre horisontalement au-delà de tous ces corps, tandis que vers le zénith, rien ne nous indique sa hauteur. Cette comparaison nous porte à la juger à la fois plus alongée et plus basse qu'elle ne l'est réellement. Nous lui supposons une courbure beaucoup plus applatie que la véritable, telle, par exemple, que $H' S' h'$, *fig.* 6.

Ainsi un navire vu isolé, à une grande distance, semble plus près qu'il ne l'est réellement, parce que la surface

Digitized by Google

de la mer étant uniforme, n'offre aucun moyen de comparaison qui puisse indiquer la succession de ses parties et l'éloignement réel des objets. Mais si plusieurs navires paraissent à la fois sur la mer, et passent entre nous et celui que nous observons, nous commençons à prendre une idée plus juste de son éloignement, et plus les objets intermédiaires se multiplient, plus notre jugement se rapproche de la vérité. Nous n'avons pas cette ressource pour redresser l'erreur de nos sens, lorsque nous estimons, d'après eux, la forme de l'atmosphère. Les moyens de comparaison nous manquent dans le sens vertical, c'est ce qui nous la fait juger trop basse. Au contraire, nous en avons, ou nous en supposons trop, dans le sens de l'horison. Leur nombre et leur grandeur nous trompent d'une autre manière, en nous faisant supposer autour de nous une étendue immense; double cause qui produit une double erreur.

43. De là résulte encore une autre illusion, dont il est impossible de se défendre. C'est un fait très-aisé à remarquer, que le soleil et la lune paraissent beaucoup plus grands à leur lever et à leur coucher, que lorsqu'ils sont vers le haut du ciel. De même les groupes d'étoiles qui n'occupent qu'une petite place lorsqu'ils sont vus à une médiocre hauteur, paraissent très-grands à l'horison; mais cette augmentation n'a rien de réel : c'est une erreur de nos sens et de notre imagination.

Lorsqu'un observateur placé au point *O fig.* 7, à la surface de la terre, regarde la lune à l'horison, l'angle visuel $L''\ O\ l''$ est un peu plus petit que l'angle $L'\ O\ l'$ sous lequel paraît cet astre quand il est près du zénith. Cela peut se prouver par le calcul, comme nous le verrons par la suite, et c'est aussi ce que l'on trouve quand on mesure ces angles avec des instrumens. Ainsi, en jugeant d'après

Digitized by Google

ces seules données, la lune devrait paraître au moins aussi grande et même un peu plus grande au zénith qu'à l'horison ; cependant c'est le contraire qui arrive. Cela vient de ce qu'en général, nous n'estimons pas la grandeur réelle d'un objet par la seule considération de l'angle visuel sous lequel nous l'appercevons. Il nous faut encore un autre élément, qui est la distance de l'objet, et nous estimons cette distance par comparaison avec d'autres corps. Or il n'y en a aucun entre nous et la lune lorsqu'elle est près du zénith, ou du moins il n'y a que l'atmosphère, qui est peu profonde dans ce sens, et dont la matière est à peine visible. Trompés par cette absence de corps intermédiaires, nous en concluons que la lune est fort près de nous. Au contraire, à l'horison, nous la supposons fort éloignée, parce qu'alors les vallées et les montagnes qui nous en séparent, s'étendent au loin devant nos yeux. L'éclat de sa lumière beaucoup plus faible à l'horison qu'au zénith favorise encore cette illusion, en nous rendant pour ainsi dire sensible l'interposition de l'atmosphère. De là vient qu'en voyant toujours cet astre sous le même angle, nous le supposons alternativement très-petit et très-grand. En cela, nous jugeons selon la méthode habituelle, que nous avons pratiquée tant de fois qu'elle nous est devenue naturelle et involontaire ; mais elle n'est pas applicable dans cette circonstance, parce qu'elle suppose que l'on connaît la distance, qui se trouve ici mal appréciée.

Ce que nous venons de dire explique également pourquoi le soleil et les groupes d'étoiles paraissent beaucoup plus grands à l'horison que lorsqu'ils sont plus élevés.

Ces illusions cessent dès que l'on n'apperçoit plus d'objets étrangers. On pourrait les détruire en regardant

Digitized by Google

la lune à travers un tube ou un rouleau de carton noirci qui ne laisse voir qu'elle seule, et dont l'ouverture soit exactement remplie par son disque. En conservant à ce tube la même ouverture, la lune ne paraîtra pas plus grande à l'horison que près du zénith. Il en sera de même si on la regarde à travers un verre enfumé, parce que l'obscurité de la teinte ne laisse voir que l'objet lumineux, et nous cache tout le reste. Il faut seulement placer l'œil de manière à n'appercevoir aucuns des corps environnans. L'interposition du verre enfumé agit encore ici très-puissamment par la grande diminution qu'il produit dans l'intensité de la lumière, soit à l'horison soit au zénith, diminution qui rend la différence absolue très-petite, et par conséquent très-difficile à juger.

44. J'ai exposé ces illusions avec quelque détail, pour montrer qu'il ne faut pas trop nous fier aux témoignages de nos sens, lorsque les circonstances ne permettent pas de vérifier ces témoignages les uns par les autres. Ce sont des instrumens que nous avons reçus de la nature pour juger ce qui est hors de nous. Chacun d'eux a son genre d'indication et de preuve, mais aucun ne suffit à lui seul pour établir notre jugement d'une manière solide, de même qu'un seul doigt ne suffirait pas pour toucher, saisir et comparer les objets. Nous devons donc, lorsque leur concours nous manque, rester dans une défiance extrême, et apprécier soigneusement chacune des conclusions auxquelles nous pouvons parvenir. Les mouvemens des astres, que nous ne pouvons suivre qu'avec le sens de la vue, offrent des exemples multipliés de ces illusions. Par cette raison, leur étude est plus capable que toute autre de donner à l'esprit cette sage réserve qui convient dans les sciences physiques.

Digitized by Google

CHAPITRE IV.

Des Instrumens nécessaires pour les observations astronomiques.

45. Ce n'est pas tout de reconnaître en général les phénomènes que la nature nous présente, il faut en déterminer les circonstances d'une manière rigoureuse, et les fixer avec assez de précision pour qu'il n'y reste plus rien d'arbitraire. Dans les chapitres que l'on vient de lire, nous avons reconnu l'existence du mouvement diurne commun à tous les astres, et celles des mouvemens propres qui appartiennent à quelques-uns d'entre eux. La comparaison des apparences diverses que l'aspect du ciel présente dans les différens pays, nous a découvert la rondeur de la terre et son isolement dans l'espace. Enfin des expériences physiques, très-simples, nous ont fait connaître la constitution et la forme de l'atmosphère dont la terre est environnée. Il faut maintenant perfectionner ces premières notions. Il faut les compléter et en fixer les résultats par des mesures exactes. Ainsi le raisonnement seul, fondé sur des considérations générales, ne nous suffit plus, et nous sommes forcés de recourir aux procédés rigoureux et aux instrumens précis employés par les astronomes.

46. Les instrumens d'astronomie peuvent se diviser en deux classes. Les instrumens optiques qui servent à perfectionner la vision; les horloges qui servent à mesurer le tems.

47. Le tems n'est pas un phénomène particulier que

Digitized by Google

l'on puisse saisir; c'est la succession même des phénomènes, ou plutôt, c'est la trace laissée dans la mémoire, par l'observation successive de plusieurs effets. En voyant tous les jours que les choses changent, en voyant qu'elles ont un commencement et une fin, nous acquérons l'idée d'avant et d'après; c'est en cela que consiste le tems.

En effet, en examinant bien ce que nous entendons par des intervalles de tems égaux, on voit que ce sont des successions d'événemens pendant lesquelles nous pourrions exécuter les mêmes choses, de la même manière; ou pendant lesquelles les mêmes phénomènes se reproduiraient dans le même ordre. Au contraire, les intervalles de tems inégaux sont ceux dans lesquels nous ne pourrions pas exécuter les mêmes choses; par exemple, parcourir le même chemin ou faire le même travail.

C'est donc le mouvement qui nous donne l'idée du tems; c'est aussi par le mouvement que le tems se mesure.

Par exemple, lorsqu'un vase, percé dans sa partie inférieure, est rempli d'eau ou de sable fin, jusqu'à une hauteur déterminée, il faut un certain tems pour qu'il se vide; et ce tems est toujours le même lorsque le vase est rempli de la même manière, à la même hauteur, dans le même lieu de la terre; voilà des intervalles de tems égaux.

Mais si l'on compare ce vase à un autre plus petit ou plus grand, il se videra plutôt ou plus tard; voilà des intervalles de tems inégaux.

La comparaison de ces intervalles entre eux, par le moyen des intervalles égaux qu'ils renferment, forme la mesure du tems.

48. Si l'on a bien compris ces définitions, on suivra facilement ce que j'ai à dire sur les moyens que l'on a successivement employés pour mesurer le tems.

On n'eut pendant longtems que des horloges qui me-

Digitized by Google

suraient le tems par l'écoulement du sable, de l'eau, ou de quelqu'autre liquide. On les nommait *clepsydres*. La nature même du procédé qui leur servait de principe ne permettait pas de leur donner une très-grande régularité.

On leur substitua avec avantage les horloges à roues, mises en mouvement par un poids. Celles-ci exigeaient un artifice particulier. Si le poids eût été abandonné librement à l'action de la pesanteur, il se serait accéléré dans sa chûte, et le mouvement de l'horloge n'aurait pas indiqué des intervalles de tems égaux. Il fallait donc que la descente du poids fût interrompue à tous momens, de manière à ne lui laisser faire, chaque fois, que de très-petites chûtes. On y parvint au moyen d'un balancier circulaire, placé horisontalement, et tournant avec effort autour d'un axe vertical. Cet axe porte deux palettes que les dents d'une roue vont pousser alternativement. Tandis que le poids de l'horloge fait tourner la roue, celle-ci par une de ses dents pousse la palette qui cède lentement à son effort; enfin la dent s'échappe, et aussitôt la dent opposée tombe sur l'autre palette où elle produit le même jeu. Le poids se trouve successivement libre et retenu par des efforts alternatifs, d'où résulte l'uniformité du mouvement et la régularité de l'horloge (*).

(*) On emploie aujourd'hui un artifice à-peu-près semblable pour régler nos montres de poche. Dans celles-ci, la résistance qu'offre le balancier est produite par un ressort tourné en spirale (*voyez* fig. 8); mais cette invention est postérieure à celle des horloges à poids, et même à celle des horloges à pendule, dont nous allons parler. On ne sait pas précisément quel était le moyen de résistance employé dans les balanciers des anciennes horloges : c'était peut-être la résistance de l'air, comme dans les volans des tourne-broches, ou peut-être encore la torsion d'une corde à laquelle l'axe du balancier était suspendu.

Digitized by Google

Les découvertes de Galilée sur la pesanteur, et l'application que Huygens en fit aux horloges, complétèrent ce mécanisme.

49. Lorsqu'on suspend un corps pesant à l'extrémité inférieure d'un fil, fixe par son extrémité, ce fil prend naturellement la direction verticale, et le corps se place au point le plus bas. Si on l'écarte un peu de cette position, il tend à y revenir en vertu de sa pesanteur; enfin, si on l'abandonne à lui-même, il oscille de part et d'autre de la verticale, et par une propriété extrêmement remarquable, ses oscillations sont toutes *isochrones*, c'est-à-dire de même durée.

Cette propriété n'est pas seulement un résultat d'expérience, elle se prouve rigoureusement par le calcul (*). Il en est de même des petites oscillations d'un corps de figure quelconque, attaché à l'extrémité d'une verge de forme invariable. Des corps ainsi suspendus, et mis en mouvement de cette manière, se nomment *des pendules*. La durée des oscillations dépend de la figure du corps suspendu, de sa grandeur, de sa masse et de la longueur de la verge. Mais les géomètres ont trouvé des méthodes pour ramener tous les cas à celui d'un pendule, dans lequel la masse de la verge serait nulle par rapport à celle du corps, considéré comme un point infiniment dense. Ce pendule idéal se nomme *pendule simple*. Les autres sont des *pendules composés*.

Lorsqu'on a observé les oscillations d'un pendule composé, on peut en conclure la longueur du pendule simple qui ferait son oscillation dans le même tems. De cette manière, on n'a jamais à comparer que des pendules

(*) *Voy.* les Traités de Mécanique.

Digitized by Google

simples de différentes longueurs, et le calcul fait encore connaître, d'après cette longueur, la durée de leurs oscillations (*).

5o. Ces oscillations régulières sont très-propres à remplacer le mouvement alternatif du balancier, dans les horloges à roues. Elles ont de plus l'avantage précieux de régler les chûtes successives du poids, d'après des intervalles de tems parfaitement égaux. Alors le mouvement des roues se conforme à celui du pendule. Une dent échappe à chaque oscillation, et comme les oscillations sont toutes égales en durée, les pas de la roue sont parfaitement uniformes. Aussi, n'emploie-t-on plus aujourd'hui, pour les observations, que des horloges à pendule, que l'on nomme vulgairement *pendules*, du nom de la pièce qui produit leur régularité.

Dans ces instrumens, le pendule est ordinairement composé d'une verge métallique au bas de laquelle on attache fixement une *lentille* aussi métallique, et ordinairement formée par deux segmens de sphère. On fait cette lentille très-pesante, pour qu'elle perde moins de son mouvement par la résistance de l'air, et aussi pour se rapprocher du cas du pendule simple, dans lequel la verge est supposée n'avoir aucune pesanteur. Le mécanisme de ces horloges réduit à son plus grand degré de simplicité, est représenté dans la figure 9 (**).

(*) *Voy.* la note 2, à la fin du livre.

(**) Le pendule, à chaque oscillation, fait tourner l'axe horisontal *Aa*, auquel il est suspendu et fixement attaché par son extrémité supérieure. Cet axe porte une tige *Bb*, recourbée par son extrémité inférieure. Quand le pendule est dans la situation *SL'*, la branche *Bb* vient en *Bb'*; son extrémité inférieure se dégage des dents de la roue; celle-ci commence à tourner entraînée par le poids *P*. Mais le pendule ne venant en *L* de l'autre côté de la verticale, la branche *Bb* engrène de

Digitized by Google

La verge métallique qui porte la lentille, est sujète à se dilater et à se raccourcir par les variations de la température. Alors la durée des oscillations du pendule devient différente; car, pour les pendules de longueur inégale, les durées des oscillations très-petites sont comme les racines carrées des longueurs. De là naîtraient dans la marche de l'horloge des variations continuelles, si l'on n'avait trouvé le moyen de corriger cet inconvénient. C'est à quoi l'on réussit par divers mécanismes que l'on applique à la verge du pendule, et qui se réduisent tous en dernière analyse à reporter en haut une partie du poids du systême, lorsque la verge s'alonge, et à la reporter en bas, lorsqu'elle se raccourcit; de telle sorte et en telle proportion que ces effets contraires se compensent exactement. Ces *appareils* dont la description détaillée

---

nouveau, et le mouvement de la roue est interrompu. Après être arrivé à ce point de repos, le pendule retourne sur lui-même, la branche *Bb* se dégage une autre fois, la chûte du poids recommence, la roue tourne, une dent échappe, et la suivante est arrêtée, comme dans la première oscillation; d'où résulte le jeu de l'horloge, et son mouvement successif et régulier.

Dans les horloges actuellement en usage, le pendule fait mouvoir une pièce horisontale, recourbée par les deux bouts, qui arrête successivement la roue d'un côté et de l'autre; c'est ce qu'on nomme un *échappement*. Pour que le mouvement soit régulier, il faut que l'échappement engrène également bien des deux côtés, et pour cela, il faut qu'il soit bien horisontal quand le pendule est en repos. C'est une attention qu'il faut avoir quand on pose une horloge. On s'apperçoit que cette condition est remplie, par l'égalité des vibrations successives, qui doivent avoir une même durée et une intensité de son absolument égale, ce dont l'oreille est un très-bon juge. Il y a, dans toutes les horloges à pendule, des vis de rappel, au moyen desquelles on peut l'amener dans cette position et l'y fixer invariablement.

Digitized by Google

appartient à la mécanique se nomment des compensateurs. On a soin d'en mettre à toutes les horloges destinées à des observations exactes. Si pourtant on se trouvait absolument forcé d'employer une horloge qui n'en eût pas, on pourrait y suppléer encore en observant avec beaucoup de soin les variations de la température, et en corrigeant par le calcul les effets de ces variations. La mécanique donne pour cet objet des méthodes que l'on trouvera dans les Traités de cette science, et qu'il n'est pas de notre ressort d'exposer.

51. Pour éviter l'embarras de compter une à une toutes les oscillations, ce qui ne manquerait pas d'occasionner de fréquentes erreurs, quelques-unes des roues de l'horloge portent des aiguilles, qui se déplaçant avec elles à chaque oscillation, et d'une égale quantité, marquent sur un cadran divisé le nombre des oscillations qui ont eu lieu.

Les horloges sont *sexagésimales* ou *décimales* selon la division de leur cadran. Dans les horloges sexagésimales, une des aiguilles fait le tour entier du cadran en soixante oscillations. On la nomme aiguille des *secondes*. La réunion de soixante oscillations, ou secondes, forme ce qu'on appelle une *minute*. Il y a pareillement une *aiguille des minutes*. Celle-ci fait un pas sur le cadran, pendant que l'aiguille des secondes fait son tour entier. Enfin la réunion de soixante minutes forme ce que l'on appelle une *heure*. Il y a aussi une *aiguille des heures* qui fait un pas sur le cadran, pendant que l'aiguille des minutes fait un tour entier. De cette manière, l'*heure sexagésimale* contient 3600 *secondes*. On comprend que les dénominations d'*heures*, *minutes*, *secondes* sont tout-à-fait arbitraires; qu'elles n'indiquent pas des mesures absolues de tems, mais des mesures relatives à la durée des oscillations du pendule qui fait marcher l'horloge, durée qui est différente selon la lon-

Digitized by Google

gueur du pendule. Cependant, les habitudes nées de nos besoins, ont introduit à cet égard des usages généraux dont on s'écarte peu. Les horloges sexagésimales sont toujours réglées de manière à marquer à-peu-près 24 heures dans l'intervalle d'un jour et d'une nuit. Alors les heures deviennent des périodes de tems, communes à toute la société, et en rapport avec ses besoins et ses travaux.

L'introduction si avantageuse du systeme décimal dans toutes les mesures, a donné naissance aux horloges décimales. Dans celles-ci, l'intervalle entier d'un jour et d'une nuit est divisé en 10 heures, l'heure en 100 minutes, la minute en 100 secondes. Il y a de même une aiguille pour chacun de ces systêmes de division, et celles du cadran y sont conformes. On voit ainsi que 10 heures décimales répondent à 24 heures sexagésimales, et généralement il est très-facile de convertir un nombre quelconque d'heures, minutes et secondes d'une de ces divisions dans l'autre (*).

Quant à la valeur absolue de ces divisions, le ciel offre comme on le verra tout-à-l'heure, des moyens très-précis pour la déterminer et pour la fixer. Notre but ici était seulement de considérer les horloges à pendules comme un moyen exact d'obtenir des intervalles de tems égaux, indépendamment des durées absolues de ces intervalles. En effet, au moyen des procédés que nous venons d'exposer, et en y joignant une extrême habileté dans

(*) Soit D un nombre donné d'heures décimales et de fractions de ces heures; en le multipliant par $\frac{24}{10}$, on le réduira en heures et fractions d'heures sexagésimales; il sera ensuite facile de convertir ces fractions en minutes et secondes, au moyen de la multiplication par 60.

Digitized by Google

l'exécution, on est parvenu à construire des horloges tellement parfaites qu'elles ne varient pas d'une oscillation sur 24 heures sexagésimales, ce dont on a fait aisément la preuve par les observations astronomiques.

52. Si l'application du pendule aux horloges a été d'un grand secours pour l'astronomie, l'invention des lunettes ne lui a pas été moins utile ; sur-tout depuis qu'on a imaginé de les adapter à des limbes circulaires sur lesquels on a marqué les divisions des arcs. Toute l'exactitude des observations modernes est due à la réunion de ces deux procédés.

Il n'entre pas dans mon plan de donner ici beaucoup de détails sur la théorie et la construction des lunettes. On les trouvera dans les traités de physique. Je me bornerai aux notions indispensables, pour l'intelligence des observations astronomiques.

Les *lunettes astronomiques* sont composées de deux *verres convexes* placés aux deux bouts d'un tube cylindrique. Le

---

Soit, par exemple, en tems décimal . . . . . $D = 2^h,2432$

Multipliant par $\frac{24}{10}$, on a les heures sexagésimales . $S = 5,38368$

Multipliant la fraction par 60, on a les minutes. . . . $23',02080$

Multipliant encore la fraction par 60, on a les secondes $1'',24800$

En réunissant ces termes, on a . . . . . $S = 5^h.23'.1'',248$

Si S était donné, on le réduirait en secondes sexagésimales ; et, en appelant N le nombre de secondes décimales équivalent, on aurait $N = \frac{S.100000}{86400}$, ou $N = \frac{S.1000}{864}$; car 24 heures, ou 86400″ sexagésimales, valent 10 heures décimales, ou 100000″ décimales. Comme on a souvent besoin de faire ces réductions, j'ai placé, à la fin du livre, des tables où les résultats sont tout calculés, tant pour les heures, minutes et secondes des deux divisions du tems, que pour les degrés, minutes et secondes des deux divisions du cercle.

Digitized by Google

verre qui est tourné du côté de l'astre, ou généralement de l'objet que l'on observe, se nomme *l'objectif*, celui qui est du côté de l'œil, se nomme l'*oculaire*.

Les lunettes font voir les objets plus nettement; elles les font voir aussi, amplifiés ou grossis. Cette propriété tient à leur construction, mais nous la prendrons seulement ici comme un fait dont tout le monde peut s'assurer.

Lorsqu'on regarde le ciel à travers une lunette, le petit espace que l'on découvre est exactement circulaire. Cet espace se nomme *le champ de la lunette*.

Comme la vision devient défectueuse vers les bords de l'objectif, on place ordinairement, dans la lunette, un anneau circulaire et noirci, percé à son centre d'une petite ouverture qui ne laisse passer que les rayons voisins de l'axe. Cet anneau s'appelle un diaphragme. On peut ainsi augmenter ou diminuer le champ de la lunette en donnant au diaphragme une ouverture plus ou moins grande.

Il y a dans l'intérieur des lunettes, un espace où les objets extérieurs viennent se peindre en petit, avec beaucoup de netteté, et que l'on nomme pour cette raison le *foyer* de la lunette. On peut le déterminer, par expérience, en plaçant, dans la lunette, un verre dépoli, et regardant à travers le tube, après en avoir ôté l'oculaire. Lorsque le verre dépoli est au foyer, l'image des objets extérieurs y forme comme une miniature. Réciproquement les plus petits objets placés dans cette partie de la lunette, peuvent toujours être vus à travers l'oculaire d'une manière très-distincte.

53. On place ordinairement au foyer des lunettes astronomiques des fils d'une finesse extrême, et qui, vus à travers l'oculaire, semblent partager le champ de la lunette en plusieurs intervalles égaux. Ces fils servent à déterminer la position précise des astres que l'on observe, à l'instant où ils s'éclipsent en passant derrière eux. Pour

Digitized by Google

que les fils restent toujours fixes et bien tendus, on les applique sur une plaque métallique percée en forme de diaphragme, que l'on fixe dans l'intérieur de la lunette, par le moyen d'une vis latérale ; après avoir déterminé auparavant par des essais le point où il faut la placer, pour que les astres et les fils soient vus à travers l'oculaire avec une égale netteté. L'appareil de ces fils ainsi disposés, se nomme un *micromètre*. L'oculaire et l'objectif des lunettes astronomiques sont ordinairement portés sur des tuyaux mobiles, qui peuvent s'enfoncer plus ou moins dans le tuyau principal de la lunette, pour donner à l'observateur la facilité de régler la distance des verres entre eux, et par rapport aux fils du micromètre, conformément à sa vue. Il faut toujours profiter de ce moyen pour enfoncer l'oculaire au point convenable, de manière que l'image de chaque fil soit parfaitement distincte, unique et bien terminée.

Il y a plusieurs espèces de micromètres. Le plus simple et le plus en usage, est celui que représente la figure 10. Il est composé de cinq fils parallèles, et d'un sixième qui les coupe à angles droits ; la plaque qui porte les fils est mobile dans la coulisse *E L*, au moyen d'une vis *V*. Lorsque le micromètre est placé, on pratique dans le tuyau de la lunette, une ouverture qui permet de faire marcher la plaque *PP* et les fils qu'elle porte, jusqu'à ce qu'on ait amené le centre *C* des fils *dans l'axe optique* de la lunette, c'est-à-dire sur la ligne qui va du centre de l'oculaire au centre de l'objectif. Quelquefois le micromètre est composé seulement de deux fils parallèles ; l'un fixe, l'autre mobile par le moyen d'une vis qui l'approche ou l'éloigne du premier. Un troisième fil croise les deux autres à angles droits. Cet appareil sert pour mesurer les diamètres apparens des astres : il est représenté dans la figure 11.

Digitized by Google

Il y a encore plusieurs autres espèces de micromètres où l'on a combiné les inclinaisons et les mouvemens des fils, de la manière la plus convenable pour les observations auxquelles ils sont destinés. Mais ces micromètres étant d'un usage beaucoup moins général que les précédens, il suffira d'en parler lorsque nous aurons besoin d'employer les observations où on les emploie; et d'ailleurs, d'après ce que nous venons de dire, il suffirait de les voir pour comprendre leur mécanisme.

54. Tels sont les principes généraux qui font l'essence des lunettes astronomiques. En appliquant ces lunettes à des limbes circulaires exactement divisés, on en a formé divers instrumens dont nous parlerons en particulier, à mesure que leur usage nous sera devenu nécessaire. On emploie aussi, en astronomie, une autre classe d'instrumens d'optique, que l'on nomme des *télescopes à miroir*; et dans lesquels les rayons lumineux sont réunis par la réflexion sur un miroir métallique concave, au lieu de l'être, comme dans les lunettes, par la réfraction dans un objectif de verre. Le miroir des télescopes les rend nécessairement volumineux, et ne permet pas de les appliquer à des limbes gradués. Aussi les emploie-t-on seulement pour les observations où la mesure des angles n'est pas nécessaire : par exemple, pour examiner le disque des planètes, celui de la lune, pour observer les éclipses, et généralement tous les phénomènes célestes qui consistent dans une simple apparition. Dans ces différens cas, les télescopes ont de grands avantages sur les lunettes, parce qu'ils ne décomposent point la lumière, et aussi parce qu'on peut leur appliquer un grossissement plus fort, sans nuire à la netteté. Mais, de plus grands détails sur cet objet, appartiennent à la science de l'optique.

Digitized by Google

CHAPITRE V.

De l'Instrument des passages et de la manière de s'en servir.

55. Le premier instrument dont nous allons nous servir et dont l'usage fait le fondement de toutes les observations astronomiques, c'est celui que l'on nomme *instrument des passages*, parce qu'en effet il sert à observer les astres lorsqu'ils passent au point le plus haut ou le plus bas du cercle qu'ils décrivent. Il est composé d'une lunette astronomique à micromètre fixe, montée à angles droits sur un axe fait au tour, voy. *fig.* 12. Cet axe destiné à rester toujours horisontal repose par ses deux extrémités sur deux coussinets parfaitement polis, enchassés et scellés dans deux blocs de pierre d'un poids considérable, qui se maintiennent par leur propre masse dans une parfaite immobilité.

D'après la seule description que nous venons de donner, on voit que la lunette de l'instrument des passages, lorsqu'elle tourne autour de son axe horisontal, décrit un *plan vertical*, c'est-à-dire, perpendiculaire au plan de l'horison ; seulement la direction de ce *vertical* est différente selon les points de l'horison vers lesquels l'axe de la lunette est dirigé. Et en effet, tous les plans qui contiennent la verticale, étant nécessairement verticaux, il y a toujours, pour chaque point de la surface terrestre, une infinité de plans qui jouissent de cette propriété.

Parmi toutes ces directions, quelle est celle qu'il faut

Digitized by Google

choisir pour que les astres, amenés dans la lunette par l'effet du mouvement diurne, y passent à l'instant de leur plus grande ou de leur plus petite hauteur? Comme tous les astres semblent marcher aussi d'un mouvement commun, il suffit de trouver cette position pour un seul d'entre eux. Or, le soleil, par l'inégale longueur de ses ombres qu'il projette aux divers instans du jour, nous offre un moyen, sinon très-exact, du moins très-simple d'en approcher.

56. Pour faire ces observations, on place sur le terrein une table de pierre polie ou de marbre que l'on rend tout-à-fait horisontale, ce dont on s'assure par le moyen d'un niveau à bulle d'air que l'on promène sur sa surface dans tous les sens. On y plante une verge bien dressée que l'on nomme un *style* et que l'on rend aussi exactement verticale qu'il est possible, au moyen d'un fil à-plomb. Ce style représente la verticale du lieu. Autour de son pied, comme centre, on décrit, sur le plan horisontal, plusieurs circonférences concentriques dont les rayons peuvent être choisis arbitrairement. L'ombre projetée par le style, d'abord très-longue le matin, se raccourcit continuellement à mesure que le soleil s'élève; son extrémité atteint successivement les diverses circonférences que l'on a décrites, et l'on marque exactement les points où elle les atteint. Lorsque le soleil a passé à sa plus grande hauteur et qu'il commence à redescendre vers l'horison, l'ombre s'alonge de nouveau par les mêmes degrés; son extrémité atteint successivement les diverses circonférences, dans un ordre contraire et sur des points différens. Mais ces points, correspondent évidemment à des hauteurs égales du soleil. On les marque avec soin, et divisant en deux parties égales l'arc de chaque circonférence, compris entre les deux observations, tous les

Digitized by Google

milieux forment, avec le pied du style, une ligne droite qui est la trace du plan où se trouvait le soleil lorsqu'il a atteint sa plus grande hauteur. Ce plan se nomme le *méridien*; sa trace la *méridienne*, dénomination dérivée du mot *midi*, qui signifie le milieu du jour; parce qu'en effet, et cela se vérifie quoique grossièrement par cette expérience, l'instant où le soleil atteint chaque jour sa plus grande hauteur, divise en deux parties égales l'arc qu'il décrit ce jour-là sur l'horison.

L'extrémité de l'ombre du style est assez difficile à reconnaître avec exactitude; elle est toujours mal terminée. Pour éviter cet inconvénient, on peut substituer au style une plaque inclinée, percée d'un trou circulaire pour laisser passer l'image du soleil. Le centre de cette image en tombant sur le plan horisontal y trace bien plus exactement l'extrémité du rayon solaire. Mais alors les circonférences concentriques doivent avoir pour centre le pied de la verticale qui passe par le centre de l'ouverture, et que l'on détermine par le moyen d'un fil à-plomb qu'on laisse descendre de ce centre sur le plan horisontal. La direction de la tige que porte la plaque est alors tout-à-fait indifférente. Un pareil instrument se nomme un *gnomon*.

Une inexactitude commune à ces deux méthodes, c'est de faire abstraction du mouvement propre par lequel le soleil s'avance chaque jour du nord au sud, ou du sud au nord, mouvement dont nous avons déja indiqué ou reconnu l'existence. Car, par une conséquence de ce phénomène, les arcs que le soleil décrit chaque jour sur l'horison, ne sont pas tout-à-fait parallèles à ceux que les étoiles décrivent par le seul effet du mouvement diurne. Mais comme ce déplacement du soleil s'opère graduellement et avec beaucoup de lenteur, les

Digitized by Google

effets en sont peu sensibles dans l'intervalle qui sépare les observations d'un même jour, et l'on peut sur-tout se dispenser d'y avoir égard dans des procédés graphiques, qui servent seulement à donner une première et même une grossière approximation.

57. Lorsqu'on a ainsi tracé la ligne méridienne, il est facile de placer l'instrument des passages, au moyen de deux fils à-plomb qu'on laisse tomber sur cette ligne des deux extrémités de la lunette, l'un passant par le centre de l'oculaire l'autre par le centre de l'objectif. Cette position trouvée, on fixe invariablement, dans la pierre, les coussinets qui portent l'axe. On rend celui-ci bien horisontal au moyen d'un niveau d'épreuve qui s'y attache; et alors la lunette, en tournant, décrit le plan du méridien, autant, toutefois, que l'on a pu s'en approcher par ces premiers essais, qui ne sont, comme on le verra tout-à-l'heure, qu'une préparation nécessaire pour arriver à l'emploi de méthodes bien plus précises.

58. Le micromètre de l'instrument des passages, ou de la *lunette méridienne*, car on lui donne également ces deux noms, doit être placé de manière que le rayon visuel *OCS*, *fig.* 13, qui passe par le centre des fils, soit exactement perpendiculaire à l'axe de rotation. Pour l'y amener, on dirige la lunette sur un objet éloigné; on remarque le point de cet objet qui répond au centre des fils, ce qui détermine la direction du rayon visuel *OC*: puis on enlève la lunette de dessus ses coussinets, et on la retourne de manière que le bout de l'axe qui était à l'occident se trouve à l'orient, et que celui qui était à l'orient se trouve à l'occident. Alors on dirige de nouveau la lunette sur l'objet. Si le centre des fils répond au même point *S*, c'est une preuve qu'il est placé

Digitized by Google

exactement, et que le rayon visuel qui y passe est perpendiculaire à l'axe de rotation; mais si ce centre répond à un autre point S', le rayon visuel est oblique à l'axe, et sa déviation, que le retournement a doublée, a pour mesure la moitié de l'angle SOS', formé par les deux rayons visuels. On fera donc marcher le micromètre, par le moyen de la vis de rappel, jusqu'à ce qu'on ait amené le centre des fils au milieu de l'intervalle apparent des deux objets, et si l'on fait exactement cette bissection, il se trouvera bien placé. Mais comme il est presqu'impossible de répondre sur cela d'une petite erreur, on recommencera de nouveau l'épreuve, dans cette nouvelle position du micromètre, en choisissant un autre point de mire, ou en ramenant, si l'on veut, la lunette sur le premier, au moyen des vis de rappel de ses supports. Si cette seconde épreuve indique une déviation, elle sera beaucoup moindre que la première fois; on la corrigera de la même manière, et en peu d'essais, on parviendra à placer le centre des fils sur le rayon visuel perpendiculaire à l'axe de rotation; c'est ce qu'on appelle *régler l'axe optique.*

59. Ceci ne détermine point encore la direction des fils : celle qui convient pour les observations des passages, consiste à rendre le fil transversal perpendiculaire au plan vertical que la lunette décrit; alors les autres fils qui sont parallèles entre eux, et ordinairement au nombre de cinq, coupés par le premier à angles droits, deviennent parallèles à ce même plan. La place du micromètre est toujours réglée, dans la lunette, par l'artiste, de manière que cette disposition des fils ait lieu d'elle-même, quand l'axe d'optique est réglé; mais il est cependant utile de la vérifier, et rien n'est plus facile. Il suffit de rendre l'axe de rotation bien horisontal, au moyen de son niveau, après quoi, dirigeant la lunette sur des objets immobiles,

Digitized by Google

et la faisant mouvoir, on voit si les points de ces objets, qui se trouvent sous les fils, les quittent dans le mouvement, ou les suivent sans déviation sensible dans toute leur étendue. Dans le premier cas, les fils n'ont pas le parallélisme exigé; dans le second cas, ils l'ont aussi exactement qu'il est nécessaire pour les observations les plus délicates.

60. La lunette méridienne étant ainsi réglée, décrit un plan vertical qui, s'il n'est pas exactement le plan du méridien, du moins ne s'en écarte pas beaucoup. Dirigeons-la vers le ciel pendant la nuit, et commençons à observer les étoiles situées du côté du sud. Une étoile entre dans le champ de la lunette *par la droite*. Nous la plaçons sur un fil transversal du micromètre, elle le suit; elle parcourt successivement, sans le quitter, les intervalles des différens fils parallèles, et après quelques instans, elle sort de la lunette, *par la gauche*, du côté opposé.

Ici nous voyons en un moment les effets du mouvement diurne dont nous avons reconnu l'existence d'une manière générale. La marche apparente de l'étoile de droite à gauche dans la lunette indique une marche réelle de gauche à droite ou d'orient en occident; car les lunettes astronomiques renversent les objets.

De plus, la permanence de l'étoile sur le fil transversal du micromètre, montre que la direction de son mouvement était sensiblement perpendiculaire au plan vertical que la lunette décrit. Cette direction était donc horisontale. Ainsi l'étoile était au point le plus élevé de sa révolution.

Cependant, nous ne devons pas accorder à cette conséquence une rigueur trop absolue; il suffirait que le mouvement de l'étoile fût à-peu-près horisontal pour qu'il nous parût tel dans le petit intervalle qu'occupe le fil horisontal du micromètre.

Digitized by Google

Tous les astres situés vers le sud et dont nous pouvons observer ainsi le passage, présentent les mêmes effets. Le méridien, déterminé par le soleil est donc aussi le même pour les étoiles ; c'est le plan du *midi* de chacune d'elles, au moins autant que nous en pouvons juger par ces effets.

Dirigeons maintenant la lunette du côté du nord, vers les étoiles qui ne se couchent jamais. Nous voyons les unes marcher dans la lunette, de gauche à droite, ce sont les plus hautes ; les autres vont de droite à gauche ce sont les plus basses. Les premières marchent donc en réalité de droite à gauche ou d'orient en occident, les dernières d'occident en orient. Voilà les effets de leur révolution circulaire ; les supérieures sont au point le plus haut de leur course, les inférieures au point le plus bas.

D'ailleurs on remarque évidemment une très-grande différence dans la rapidité des passages en général. Les étoiles situées du côté du sud parcourent beaucoup plus vîte le champ de la lunette ; celles qui se trouvent du côté du nord vont beaucoup plus lentement. Une d'entre elles sur-tout, a un mouvement si lent qu'on peut, entre son entrée et sa sortie, observer un grand nombre de passages d'étoiles du côté du sud.

Ces différences indiquent évidemment que le mouvement général des astres s'exécute autour d'un axe dont un des pôles de rotation est situé du côté du nord ; c'est encore ce que l'aspect général du ciel nous avait fait soupçonner.

61. Mais c'est l'admirable invention des horloges à pendule qui donne la mesure précise de ces mouvemens divers. Quand on observe le passage d'un astre, on écoute en silence les battemens de l'horloge, et l'on note exactement l'heure, la minute, la seconde et la fraction de seconde, où l'astre passe à chacun des fils.

Digitized by Google

Si ces fils sont tous à égale distance, et l'on s'efforce toujours de les placer ainsi, une moyenne arithmétique entre les époques observées donne, en *tems de la pendule*, l'instant précis du passage de l'astre au fil du milieu du micromètre.(*). Ce passage se trouve déterminé par les cinq observations plus exactement que par une seule, parce qu'il est toujours probable qu'on ne se trompe pas dans le même sens pour tous les fils, mais dans des sens différens; de sorte que dans l'addition des cinq résultats, une partie des erreurs doit très-probablement s'entre-détruire.

Si les distances des fils ne sont pas exactement égales, et il est bien difficile qu'il n'y ait pas sur cela quelque petite incertitude, la moyenne arithmétique des cinq observations ne s'appliquera pas au fil du milieu du micromètre, mais au milieu véritable, qui en sera du moins extrêmement rapproché. Ce milieu constituera donc comme une sorte de fil idéal qui sera le même pour tous les astres, et il n'en résultera aucun inconvénient considérable tant que l'on ne dérangera point le micromètre; condition indispensable, et dont l'oubli entraînerait les plus grandes erreurs.

Ayant ainsi appris à combiner les indications de la lunette méridienne avec la mesure du tems par les horloges, réunissons un système d'observations faites avec ces deux instrumens, et voyons les conséquences positives que nous en pourrons tirer.

(*) Soit T l'époque du passage au fil du milieu du micromètre. t le tems que l'astre emploie pour aller d'un fil à l'autre. Les époques des passages aux cinq fils successifs, seront $T-2t$; $T-t$; T; $T+t$; $T+2t$. Dont la moyenne est T.

Digitized by Google

CHAPITRE VI.

De l'Egalité des révolutions du ciel, et de leur usage pour la mesure du Tems.

62. L'INSTRUMENT des passages étant réglé, comme nous venons de le dire, si on le dirige plusieurs nuits de suite vers une même étoile, et que l'on observe chaque fois, avec une bonne horloge à pendule, l'heure, la minute, la seconde, et la fraction de seconde à laquelle le passage a eu lieu; les intervalles de ces retours, comptés en tems de la pendule, seront parfaitement égaux. Ce résultat, vérifié constamment par tous les observateurs, est la base de toute l'astronomie.

Pour en donner un exemple, et montrer ainsi par le fait que l'uniformité que l'on suppose ici aux horloges n'est point idéale, je rapporterai les passages suivans de l'étoile que l'on nomme α du bélier, observés par Arago et moi, dans la petite île presque déserte de Formentera (*).

(*) J'aurais pu, sans doute, en consultant les registres de Delambre ou de l'Observatoire, trouver des observations plus parfaites que celles que je rapporte, et plus dignes d'être citées; si j'ai choisi les précédentes, ce n'est pas par un sentiment d'amour-propre, mais uniquement parce que les circonstances où elles ont été faites sont analogues à l'espèce d'isolement où je suppose ici un observateur, créant toute l'astronomie avec ses seuls instrumens, sans aucun secours étranger.

Digitized by Google

DATES des Observations.	ÉPOQUES des passages de α du Bélier, en tems de la pendule.	INTERVALLES de deux passages consécutifs.
1807. Décembre 24	9h 42′ 32″36	
25	9 41 29.70	23h 58′ 57″34
26	9 40 26.72	23 58 57.02
27	9 39 23.90	23 58 57.18
28	9 38 21.38	23 58 57.48
30	9 36 15.74	23 58 57.18
1808. Janvier... 2	9 33 7.68	23 58 57.31(*)
5	9 29 59.06	23 58 57.13
6	9 28 55.88	23 58 56.82
9	9 25 47.66	23 58 57.26

L'isochronisme de ces intervalles est si approché, les variations que l'on y remarque sont si petites et si peu régulières, qu'il est bien naturel de le regarder comme rigoureux, et d'attribuer ces petits écarts à de légères irrégularités de l'horloge, et aux erreurs des observations.

63. Ce qui confirme cette vérité, et ce qui achève de la rendre certaine, c'est que l'intervalle compris entre deux passages consécutifs n'est pas seulement constant pour chaque étoile; il est encore le même pour toutes. Voici par exemple les passages de plusieurs autres étoiles aussi observés à Formentera, avec les mêmes instrumens.

(*) Quand il se passe quelques jours sans que l'on puisse observer, comme du 30 au 2, on divise la différence des tems par le nombre des révolutions diurnes qui s'est écoulé dans l'intervalle. Par exemple

Digitized by Google

DATES des observations.	NOMS des étoiles observées.	ÉPOQUES des passages au tems de la pendule.	INTERVALLES des passages.
1808. Janv. 10	α du Bélier..	9h 24′ 43″02	
	Aldebaran..	11 53 11.10	
	Rigel.....	12 33 37.92	
	β du Taureau	12 43 6.20	
	σ d'Orion...	12 59 21.30	
	Arcturus....	21 34 42.62	
Janv. 11	α du Bélier..	9 23 40.53	23h 58′ 57″51
	Aldebaran..	11 52 8.34	23 58 57.24
	Rigel.....	12 32 35.26	23 58 57.34
	β du Taureau	12 42 3.52	23 58 57.32
	σ d'Orion...	12 58 18.60	23 58 57.30

Après le passage de σ d'Orion, il arriva un accident à l'horloge ; en la remontant elle s'arrêta pendant un instant.

Arcturus.... 21 33 38.08

64. Enfin, l'isochronisme de ces intervalles n'a pas seulement lieu dans le plan du méridien ; on l'observe également dans tous les plans verticaux. Cette vérité est confirmée par l'expérience générale de tous les astronomes. On peut même en voir une preuve dans les dernières observations que je viens de rapporter ; car, lorsqu'on les

du 30 au 2, la différence est 71h56′51″,94 qui, divisé par 3, donne 23h58′57″,31 pour *la marche diurne moyenne.*

Digitized by Google

fit, l'instrument avait été placé à dessein dans un vertical un peu différent de celui où on l'avait mis jusqu'alors. Il est facile de s'appercevoir de ce déplacement par la marche de l'horloge, qui du 9 au 10 ne donne pas entre les passages de α l'intervalle accoutumé.

65. Quel que soit le vertical dans lequel on veut observer ces phénomènes, il faut que les fils du micromètre auxquels on rapporte les passages soient exactement parallèles au plan vertical que la lunette décrit. Cette condition est nécessaire pour éviter les effets de la réfraction qui, ainsi que nous le verrons bientôt, augmente les hauteurs apparentes des astres sur l'horison, et non pas toujours d'une égale quantité ; de sorte qu'elle pourrait les amener plutôt ou plus tard sur les fils du micromètre, si ceux-ci étaient inclinés à l'horison. Cet inconvénient n'existe plus si les fils sont parallèles au plan vertical de l'astre ; car alors l'instant où il les atteint est le même que s'il n'y avait pas de réfraction, et il en résulte seulement qu'il les coupe plus haut ou plus bas.

66. Je dois cependant prévenir que si l'on observait ainsi des étoiles situées très-près de l'axe de la rotation diurne, par exemple, l'étoile que l'on appelle *la polaire*, on devrait, si les observations étaient faites avec la dernière exactitude, trouver entre les passages consécutifs des différences appréciables, qui pourraient quelquefois s'élever jusqu'à $\frac{1}{2}$ seconde de tems ; c'est-à-dire jusqu'à être environ $\frac{1}{172800}$ de la durée d'une révolution totale. Ces différences sont produites par de très-petits déplacemens, qui s'opèrent dans la position apparente de tous les astres, même des étoiles, suivant des lois dont nous parlerons par la suite ; pour le moment, il nous suffira de dire que la cause en est bien connue, et la marche exactement déterminée. On les nomme *la précession*, *l'aberration* et

Digitized by Google

la *nutation*. Leur effet sur la durée d'une seule révolution ne saurait être appréciable que pour des étoiles très-voisines de l'axe de rotation du ciel ; mais comme ces étoiles décrivant un très-petit cercle font leur révolution diurne avec une extrême lenteur, elles restent si longtems sous les fils du micromètre, que l'instant précis de leur passage ne peut être saisi que très-difficilement, et les erreurs que l'on commettrait en les observant ainsi couvriraient entièrement l'effet diurne des mouvemens dont nous venons de parler. Aussi, pour régler les horloges, n'observe-t-on que des étoiles dont le mouvement diurne est assez rapide pour que l'on puisse saisir avec précision l'époque instantanée de leur passage derrière chacun des fils de la lunette ; et pour ces étoiles, les mouvemens dont nous venons de parler n'ont pas d'effet sensible dans l'intervalle d'une seule révolution diurne. Leur influence ne devient applicable qu'en comparant entre elles les époques de deux passages très-éloignés. Aujourd'hui que les causes et les lois de ces mouvemens sont connues, les astronomes calculent les effets presque insensibles qu'ils doivent produire chaque jour sur la position des étoiles qu'ils observent. Ils peuvent par conséquent connaître la part qu'il faut leur attribuer dans les observations, et par ce moyen, ils réduisent les phénomènes à ce qu'ils seraient si les astres n'étaient point affectés par ces petits mouvemens. Quoique nous ne puissions entrer que plus tard dans l'examen de ces méthodes, j'ai voulu dès à-présent les indiquer, afin de pouvoir donner tout de suite à l'exposition des résultats sa dernière rigueur ; rigueur qu'elle n'a acquise que successivement, et par des siècles d'observations et d'approximations réitérées.

On a découvert aussi dans plusieurs étoiles de très-petits mouvemens propres analogues à ceux des planètes.

Digitized by Google

J'indiquerai par la suite les causes les plus probables auxquelles on croit devoir les attribuer. Pour le moment, cette connaissance ne nous est pas nécessaire ; car aucun de ces mouvemens n'est sensible sur l'intervalle d'une seule révolution, et il en faut même accumuler un très-grand nombre pour pouvoir en appercevoir l'existence.

Ainsi, en supposant les positions des étoiles corrigées des petites causes de variation que nous venons d'y reconnaitre, et dont l'effet sur une seule révolution est presque insensible, nous pouvons regarder les passages consécutifs d'une même étoile comme comprenant des intervalles de tems égaux, ou du moins aussi prochains de l'égalité qu'on peut espérer d'y parvenir par des moyens mécaniques.

67. Cette égalité constante n'a pas lieu pour les astres qui ont des mouvemens propres, comme les planètes et les comètes : la durée de leur révolution diurne est plus longue ou plus courte que celle des étoiles ; plus longue, si leur mouvement propre est dirigé d'occident en orient, en sens contraire du mouvement diurne ; plus courte si leur marche est dirigée d'orient en occident. On conçoit de plus que ces différences doivent être inégales pour les différens astres, selon la plus ou moins grande rapidité de leur mouvement propre ; mais quelque petites qu'elles puissent être, des observations suivies pendant quelques jours, en les accumulant, suffisent pour les faire appercevoir ; et c'est ainsi que l'on distingue les astres doués de mouvemens propres, d'avec ceux qui n'en ont point, ou qui n'en ont que de très-petits. Car il n'est peut-être pas une étoile au ciel dans laquelle on ne découvrit quelques mouvemens propres presque imperceptibles, par une application longue et suivie de ces procédés. Mais quoique ces mouvemens soient durables,

Digitized by Google

leur excessive lenteur doit les faire distinguer des autres mouvemens propres, tels que ceux des planètes et des comètes, qui sont incomparablement plus rapides. Ceux-ci, après deux jours d'observations consécutives, deviennent déja sensibles; les autres le deviennent à peine après des mois entiers, et les changemens qu'ils produisent *sur deux retours consécutifs* d'une même étoile, ou de deux étoiles quelconques comparées entre elles, ne peuvent être apperçus directement par aucun moyen : c'est ce que prouvent même les observations d'étoiles que nous venons de rapporter.

68. Cette constante égalité de la révolution des fixes s'observe dans tous les pays et dans tous les tems. En l'adoptant comme tout-à-fait exacte, et il est naturel de la supposer telle, sans s'arrêter aux petites irrégularités des observations, elle nous offre *l'unité de tems* la plus parfaite que l'on puisse desirer; car le type de cette unité est commun à toute la terre, il est toujours présent aux observateurs. Enfin, ce qui est son avantage le plus précieux, il est absolument inaltérable; car on est parvenu à prouver, par des considérations théoriques, qu'il n'a éprouvé aucune variation appréciable depuis les plus anciens astronomes jusqu'à nous.

L'unité de tems, exactement définie, sera donc l'intervalle de deux retours consécutifs d'une même étoile au même plan vertical, corrigé de la précession, de l'aberration et de la nutation. Cet intervalle se nomme *un jour sydéral*. On le conçoit partagé en vingt-quatre heures sexagésimales, ou en dix heures décimales, selon que l'on veut adopter l'une ou l'autre de ces divisions : quant aux subdivisions de ces heures, elles sont telles que nous l'avons dit plus haut, § 51.

69. L'enchaînement mathématique que l'on est parvenu

Digitized by Google

à établir entre tous les résultats des mouvemens célestes, a fait voir que le jour sydéral est par sa nature un des élémens les plus invariables du systême du monde. Pour concevoir comment on a pu réduire ainsi tous ces phénomènes à une *théorie* calculable ; il faut savoir que les mouvemens des astres sont assujétis à plusieurs grandes lois générales, que la comparaison des observations a fait reconnaître, et qui sont susceptibles d'un énoncé mathématique. On les nomme les *lois de Kepler*, parce qu'elles ont été découvertes par ce grand astronome. En partant de ces lois, Newton est parvenu à déterminer les expressions des forces mécaniques qui sont nécessaires pour les produire. Il a trouvé qu'il fallait que les corps célestes s'attirassent mutuellement, en raison directe de leur masses et inverse du carré de leurs distances, pour produire les résultats que Kepler avait observés. Cette découverte, la plus belle que l'on ait jamais faite dans les sciences, a permis de calculer *à priori* tous les mouvemens des corps célestes, comme étant les conséquences d'une loi uniqne, et les indications du calcul se sont toujours trouvées si exactement conformes aux faits, que l'on a peine à concevoir un accord aussi merveilleux. Alors on a dû regarder *l'attraction universelle* comme un premier fait plus exact que les observations mêmes, et on s'est attaché à en suivre les conséquences comme devant donner la clef de tous les phénomènes du systême du monde. Tel a été l'objet principal vers lequel les plus habiles géomètres, Euler, Lagrange et Laplace ont dirigé les travaux de toute leur vie. Enfin, M. Laplace a réuni toutes les découvertes, et les siennes propres, dans le grand ouvrage qu'il a intitulé *Mécanique céleste*, parce que tous les phénomènes célestes y sont déduits du premier fait de l'attraction, d'après les lois de la mécanique.

Digitized by Google

Le même auteur, dans un autre ouvrage intitulé *Exposition du Système du Monde*, a réuni, tous les résultats démontrés dans la *Mécanique céleste*, et il s'est attaché à développer leurs rapports sans le secours du calcul, quoique toujours par des raisonnemens mathématiques. Ces deux ouvrages, que l'on pourrait appeler le code des lois du ciel, sont des autorités auxquelles nous devrons sans cesse recourir pour énoncer les résultats astronomiques avec la dernière précision. Car c'est la théorie seule née de leur ensemble qui peut les dégager complètement des causes secondaires qui les altèrent, les séparer pour ainsi dire les uns des autres, les montrer isolément, et découvrir par des calculs certains les variations que la suite des tems peut leur faire subir. Toutes ces choses auraient été éternellement inconnues aux hommes, sans la théorie de l'attraction universelle; par conséquent elle seule peut en démontrer la réalité. Mais comme on ne saurait s'élever jusqu'à cette hauteur dans un simple livre élémentaire tel que celui-ci, il faut, pour donner une idée exacte et entière des résultats auxquels l'observation nous a conduits, indiquer dès à présent les complémens que la théorie leur donne. Ainsi nous venons de trouver par l'expérience que la révolution des fixes, ou le jour sydéral, a une durée sensiblement constante. La théorie confirme ce résultat; mais elle va beaucoup plus loin, et elle prouve, comme M. Laplace l'a fait voir dans la *Mécanique céleste*, que la durée du jour sydéral n'a pas varié d'un centième de seconde depuis Hipparque jusqu'à nous.

70. C'est donc aux révolutions des fixes, comme unité de tems, que nous allons désormais rapporter toutes les horloges astronomiques. Si nous reprenons sous ce point de vue les observations de la page 58, nous voyons d'abord que l'horloge a toujours marqué moins de vingt-quatre

Digitized by Google

heures entre deux retours consécutifs de la même étoile, ou dans un jour sydéral. Ainsi elle *retardait sur le tems sydéral.* Pour avoir la mesure de ces retards, il suffit de prendre la différence des heures qu'elle marquait aux époques des passages consécutifs; car si elle avait marqué exactement 24 heures dans un jour sydéral, les passages consécutifs seraient toujours revenus aux mêmes heures. On trouvera ainsi pour ses *retards diurnes* les valeurs suivantes :

DATES des observations.	ÉPOQUES des passages de α du Bélier.	DIFFÉRENCE des époques, ou retard diurne.	
1807. Déc. 24	9h 42′ 32″36		
25	9 41 29.70	1′ 2″66	
26	9 40 26.72	1 2.98	
27	9 39 23.92	1 2.82	
28	9 38 21.38	1 2.52	
30	9 36 15.74	1 2.82	Moyenne des 2 jours, du 28 au 30.
1808. Janv. 2	9 33 7.68	1 2.87	Moyenne des 3 jours.
5	9 29 59.06	1 2.87	*idem.*
6	9 28 55.88	1 3.18	
9	9 25 47.66	1 2.74	Moyenne des 3 jours.
Retard moyen....		1 2.72	

Ici les époques marquées par la pendule vont en diminuant, parce qu'elle marque moins de vingt-quatre heures entre deux passages. Ce serait le contraire si elle marquait plus de vingt-quatre heures; les époques des passages

Digitized by Google

consécutifs iraient en augmentant. Le signe de ces différences montre donc si la pendule *retarde* ou *avance* sur le tems sydéral, et leur valeur indique de quelle quantité.

Au reste, ces différences ne sont autre chose que le complément à vingt-quatre heures des intervalles marqués par la pendule entre deux passages consécutifs.

En prenant la moyenne de toutes les observations précédentes, le retard diurne de l'horloge sur un jour sydéral sera, en secondes sexagésimales, $62''.72$. Les écarts des résultats particuliers autour de cette moyenne sont si peu considérables, qu'on doit moins les attribuer à l'horloge qu'aux erreurs des observations. Si l'on adopte la division décimale du jour et des heures, le retard, en secondes décimales, sera $\frac{62,72.100000''}{86400} = 72'',59$, ou enfin, en rapportant tout au jour sydéral, pris pour unité de tems, $\frac{62,72}{86400} = 0^j,0007259$.

71. Les retours consécutifs d'une même étoile au même vertical font ainsi connaître la marche diurne de l'horloge prise en totalité. Les passages successifs des étoiles différentes apprennent ensuite si cette marche est uniforme dans ses diverses parties, car les intervalles de ces passages pour deux étoiles quelconques, mais toujours les mêmes, sont égaux entre eux (*).

(*) Ceci est une conséquence de l'égalité de la révolution diurne pour toutes les étoiles. Soient H H' les heures de deux passages consécutifs d'une étoile au même vertical; h h' les heures de ces passages pour une autre étoile. Si la marche de l'horloge est uniforme, et que son retard diurne sur les étoiles soit R, la première étoile devra donner $H' - H = R$; la seconde $h' - h = R$;

Digitized by Google

Par exemple, si l'on forme les intervalles des passages des différentes étoiles observés les 10 et 11 janvier, à Formentera, on trouvera

NOMS des étoiles comparées.	INTERVALLES DES PASSAGES. le 10.	le 11.	Différences.
α du Bélier et Aldebaran	2h 28′ 28″18	2h 28′ 27″81	+0″37
Aldebaran et Rigel....	0 40 26.82	0 40 26.92	—0.10
Rigel et β du Taureau..	0 9 28.28	0 9 28.26	+0.02
β du Taureau et σ d'Orion	0 16 15.10	0 16 15.08	+0.02
σ d'Orion et Arcturus..	8 35 21.32	8 35 19.48	+1.84

Les quatre premières différences sont assez petites et assez irrégulières, pour qu'on puisse les attribuer aux erreurs des observations. Ainsi, dans tout cet intervalle, le mouvement de l'horloge a été constamment égal. Mais il n'en est pas ainsi de la dernière différence. Elle indique évidemment une variation survenue dans l'horloge, variation qui l'a fait retarder de 1″,84 sur sa marche ordinaire, et qui est arrivée entre les passages de σ d'Orion et d'Arcturus. De plus, ce retard est purement accidentel, car on n'en trouve aucune trace dans les observations précédentes, et on n'en trouve pas davantage dans les observations du 11 qui ont suivi le passage d'Arcturus. Il en résulte donc qu'il faut ajouter 1″84 à tous les tems

par conséquent, $H' - H = h' - h$, ou, en transposant, $H - h = H' - h'$; or, $H - h$, $H' - h'$ sont les intervalles des passages successifs des deux étoiles au même vertical; donc, si le mouvement de la pendule est uniforme, ces intervalles sont égaux.

Digitized by Google

marqués par la pendule, depuis cette époque, pour les comparer aux observations antérieures, ce qui rétablira la continuité. En effet, on voit par l'extrait des observations rapportées plus haut, que la pendule s'était arrêtée un instant lorsqu'on l'avait remontée après le passage de ϵ d'Orion, ce qui occasionne le retard observé. Mais quand on n'aurait pas été prévenu de cet accident, on voit qu'on s'en serait apperçu par les observations, et, qu'en montrant son existence, elles donnent avec exactitude la correction qu'il nécessite. Si, par des discussions de ce genre, on étudie soigneusement la marche de l'horloge, dans son ensemble et ses diverses parties, il est évident que l'on parviendra à la connaître avec exactitude, et que l'on découvrira infailliblement ses plus petites irrégularités. Quand nous serons plus avancés, nous verrons que l'on peut arriver au même but par des observations qui ne supposent point l'instrument des passages.

72. Lorsque l'horloge dont on fait usage est fort éloignée de suivre le tems sydéral, on peut l'en rapprocher en élevant la lentille si elle va trop lentement, ou en l'abaissant si elle va trop vîte. En effet, par ce procédé, on rend le pendule plus court ou plus long. Il y a, pour cela, des vis de rappel dans toutes les horloges astronomiques. Quelques essais suffisent pour amener l'horloge à suivre le tems sydéral, sinon exactement, du moins à très-peu près. Le reste de son retard ou de son avance se corrige ensuite par le calcul. Il ne faut pour cela qu'une simple proportion. Soit r son retard diurne exprimé en secondes. Concevons une horloge idéale qui suive exactement le tems sydéral, et qui parte de $0^h\ 0'\ 0''$ en même tems que la véritable. Si l'on veut connaître l'intervalle de tems sydéral qui s'est écoulé lorsque la première a marqué le tems t exprimé en heures, minutes et secondes,

Digitized by Google

on aura la proportion : $86400'' - r$, mouvement diurne de l'horloge, sont à $86400''$ ou à 24 heures de tems sydéral, comme t est au nombre cherché, qui sera.... $\frac{86400'' t}{86400'' - r}$, ou $t + \frac{t.r}{86400 - r}$; le second terme de cette valeur $\frac{t.r}{86400 - r}$ exprime la correction qu'il faut faire au tems t, observé à l'horloge, pour avoir l'intervalle de tems sydéral qui y correspond. Si l'horloge avance sur les étoiles, au lieu de retarder, r devient négatif, et alors la correction $\frac{-tr}{86400 + r}$ devient soustractive de l'intervalle observé. Il est clair que cette correction est toujours exprimée en unités de même espèce que t, puisque $\frac{r}{86400 - r}$ est un nombre abstrait. Ainsi en réduisant t en secondes, ce sera en secondes que la correction sera exprimée.

Si le mouvement de l'horloge était inégal, r ne serait pas le même à différens jours, ou dans les différentes parties d'un même jour; et alors il faudrait employer à chaque fois la valeur qui convient aux époques que l'on considère. Mais quoiqu'il soit presque impossible qu'une horloge conserve invariablement la même marche, cependant, si elle est bonne, ses variations ne doivent jamais se faire d'une manière brusque et irrégulière ; car, si cela avait lieu, il en résulterait toujours, dans les observations, des incertitudes inévitables. En général, il ne faut à l'astronome qu'un petit nombre d'instrumens, mais il faut qu'ils soient parfaits.

73. En résumant ce qui a été dit dans ce chapitre, on voit que les révolutions constantes des étoiles, nous donnent l'unité de tems, et que leur succession, aussi

Digitized by Google

constante, nous offre les parties de cette unité. Toutes les horloges, rapportées à cette mesure commune, deviennent comparables entre elles, quelle que soit leur marche; et l'on peut toujours leur substituer, par la pensée ou par le calcul, une horloge idéale, marquant exactement 24 heures dans un jour sydéral. C'est ainsi que nous en userons dans les chapitres suivans.

Jusqu'ici nous n'avons employé la lunette méridienne que pour observer des passages d'étoiles. En effet, aucun autre élément ne nous était nécessaire pour déterminer la durée du jour sydéral, et la mesure du tems. La lunette méridienne sert également pour observer les passages de tous les astres; mais la plupart d'entre eux offrant un disque d'une étendue sensible, on ne peut pas apprécier le passage de leur centre, derrière chacun des fils du micromètre, ainsi qu'on le fait pour les étoiles, qui ne paraissent que comme des points. Pour éluder cet inconvénient, on observe le passage du premier bord du disque, lorsqu'il vient toucher chaque fil, et le passage du second bord lorsqu'il quitte ce même fil. Le milieu arithmétique entre ces deux instans est évidemment l'époque du passage du centre. De cette manière l'opération devient la même que si l'on observait une étoile. On répète les deux observations pour les cinq fils du micromètre, et la moyenne arithmétique, entre toutes les époques, donne également le passage du centre de l'astre au fil du milieu. Si c'est le soleil que l'on observe, il y a encore une précaution à prendre; c'est de placer devant l'oculaire un verre noirci, pour affaiblir l'intensité de sa lumière qui, condensée par la lunette, aveuglerait infailliblement l'observateur. Cette précaution est également indispensable toutes les fois que l'on doit regarder le soleil avec des instrumens optiques. Ordinairement le

Digitized by Google

verre noirci est monté de manière a pouvoir s'adapter au tube de la lunette, devant l'oculaire, ce qui évite la peine de le tenir à la main. Il en résulte plus de facilité dans les observations, et c'est un avantage qui n'est jamais à négliger, car il influe sur la bonté des observations mêmes.

Enfin, lorsqu'on observe de nuit, il devient nécessaire d'éclairer les fils du micromètre. Car la faible lumière des étoiles dont on observe le passage, ne suffirait pas pour les faire distinguer assez nettement. Quelquefois on se contente d'adapter devant l'objectif de la lunette un miroir incliné, percé à son centre, pour laisser passer les rayons de l'astre; et qui, par son obliquité réflechit dans la lunette, la lumière d'une lampe placée convenablement. Cet appareil se nomme *un réflecteur*. Mais il est beaucoup plus commode de percer l'axe horisontal de l'instrument, de placer une lampe devant cette ouverture, et d'en réfléchir la lumière sur les fils au moyen d'un petit miroir plan, ou même d'un simple diaphragme blanc et poli, placé obliquement dans ce tuyau de la lunette. Cette disposition est représentée dans la *fig.* 12. Par ce moyen la direction de la lumière réfléchie suit toujours et accompagne celle de la lunette, dans toutes ses positions. On pousse même le soin jusqu'à placer, devant la lampe, un verre prismatique, dont la position variable au gré de l'observateur lui permet de graduer à volonté l'intensité de la lumière, par les variations de son épaisseur.

Digitized by Google

CHAPITRE VII.

Détermination exacte du Méridien par la mesure du tems. Définition exacte de la Méridienne, de la Perpendiculaire et des Azimuths.

74. L'INSTRUMENT des passages étant placé dans un plan vertical, comme nous avons enseigné à le faire dans le chapitre V, et l'horloge étant bien réglée sur le tems sydéral, si l'on observe les deux passages supérieurs et inférieurs d'une même étoile, de celles qui ne se couchent point, on trouvera presque infailliblement une différence de tems entre les intervalles de ces passages ; c'est-à-dire que l'un sera plus long qu'une demi-révolution du ciel, ou douze heures sydérales et l'autre moindre que douze heures, de la même quantité. Cependant si l'on n'a pas placé l'instrument au hasard, dans un vertical quelconque, mais si l'on a suivi exactement le procédé que nous avons décrit, la différence des deux passages ne pourra pas être bien considérable, et elle s'élevera tout au plus à quelques minutes de tems. Mais il est facile de la rendre moindre, en déplaçant tant soit peu les supports de l'axe, de manière à tourner la lunette d'une petite quantité vers l'orient ou vers l'occident, dans le sens nécessaire pour rétablir l'égalité. Ce déplacement des supports ne se fait pas avec la main, mais avec une vis munie d'un cadran divisé, et d'un index qui indique sur le cadran les plus petits mouvemens que

Digitized by Google

l'on donne à la vis. Comme, au moyen de cet appareil, on sait à chaque fois dans quel sens et de quelle quantité on a fait marcher les supports, il suffit d'un petit nombre d'essais pour amener la lunette dans la position desirée. Nous supposons que l'on a soin de maintenir toujours l'axe horisontal, ce qui se fait au moyen d'une autre vis de rappel, qui soulève ou abaisse un des supports de l'axe, jusqu'à ce que le niveau d'épreuve indique sa parfaite horisontalité. Toutes ces conditions étant remplies, la lunette de l'instrument, ou pour parler plus exactement, le centre des fils du micromètre se trouvera placé dans un plan vertical, qui aura la propriété de diviser la révolution de l'étoile observée en deux parties, correspondantes à des intervalles de tems parfaitement égaux.

Or, on trouve de plus que cette bissection, ainsi déterminée par une seule étoile, a lieu également pour toutes celles dont on peut observer les deux passages opposés, de sorte que les intervalles de ces passages au centre des fils sont aussi de douze heures, comme pour la première. Ce résultat se vérifie dans quelque lieu de la terre que l'on soit placé. Par conséquent, si l'on suppose que le mouvement de révolution des étoiles soit uniforme et circulaire, supposition exactement conforme aux phénomènes, comme on le verra plus bas, le plan vertical déterminé par ces procédés, contiendra l'axe de rotation du ciel; car c'est seulement autour d'un plan mené par cet axe, que l'égalité des passages peut avoir lieu.

Ce plan est le *méridien*. Nous l'avions déterminé par une première approximation dans le chapitre V; mais il se trouve ici fixé, avec toute la précision desirable, par la mesure du tems (*).

(*) Nous n'indiquons ici que cette méthode parce qu'elle est très-

Digitized by Google

75. Cette propriété de diviser la révolution des étoiles en deux parties d'égale durée, ne peut être vérifiée immédiatement que pour les étoiles qui ne se couchent jamais. Pour les autres, en supposant le plan du méridien indéfiniment étendu, leur passage inférieur se fait par-dessous la terre, et l'interposition de sa masse nous empêche de l'observer. Mais en suivant leur marche sur l'horison, dans toute l'étendue de l'arc qu'elles décrivent, on y reconnaît, de part et d'autre du méridien, une symétrie, une correspondance qui montre évidemment que le second passage que nous ne pouvons point voir, a lieu comme pour les étoiles toujours visibles, après une demi-révolution.

Une preuve très-simple et très-exacte de cette symétrie, c'est que l'époque du passage d'une étoile au *méridien supérieur* étant observée à la pendule, est exactement intermédiaire entre les époques où la même étoile atteint sur l'horison des hauteurs égales, de part et d'autre de ce plan. Cela est vrai, pour toutes les hauteurs, même pour celles qui sont nulles et qui répondent au lever et au coucher de l'astre. Les instans de ces phénomènes sont également éloignés du passage au méridien supérieur. Tout nous porte à croire que la même correspondance se conserverait encore sous l'horison, si nous pouvions y suivre les astres; de sorte qu'ils arriveraient à leur plus grande hauteur *au-dessous* de ce plan, c'est-à-dire au *méridien inférieur*, après une demi-révolution.

---

simple, très-exacte, et qu'elle ne suppose aucune connaissance anticipée. Mais lorsque l'on connaît les lois du mouvement diurne, l'observation des passages successifs de différentes étoiles fournit un procédé plus expéditif, parce que les différences des époques de ces passages varient avec l'azimuth du vertical dans lequel on les observe. Voyez la note 3, à la fin du livre.

Digitized by Google

En effet, la chose devient tout-à-fait certaine, si l'on considère que tous les lieux répartis sur le contour de la terre observant la même symétrie, un astronome situé sur le méridien inférieur, de l'autre côté de la terre, l'observerait également.

76. Ces propriétés n'ont lieu que pour les astres fixes; dont les hauteurs sur l'horison redeviennent exactement les mêmes à chaque révolution du ciel. Si ces hauteurs varient, la symétrie est détruite; ou du moins elle n'existe plus que d'une manière approchée, en faisant abstraction du mouvement propre de l'astre, c'est-à-dire, en négligeant de tenir compte des effets de ce mouvement dans l'intervalle des observations comparées. Tel est le cas du soleil, dont les hauteurs nous ont servi dans le chapitre V, pour déterminer à-peu près la direction du plan du méridien.

77. La correspondance dont nous venons de parler, ne se vérifie pas toujours avec la dernière rigueur même pour les étoiles, à cause des variations accidentelles de la réfraction qui, venant à changer entre les intervalles des observations correspondantes, peut altérer inégalement les hauteurs. Alors le milieu entre les époques des deux passages, peut différer de quelques secondes de tems, du passage que l'on aurait observé dans le plan du méridien. Mais ces effets sont presque insensibles dans un tems calme où la température et la pression de l'atmosphère restent à-peu-près constantes; et, enfin, on les faît rigoureusement disparaître par le calcul, d'après la connaissance des lois de la réfraction, que nous donnerons plus loin.

78. Pour faire ces observations de *hauteurs correspondantes* qui étaient sur-tout en usage autrefois, lorsqu'on n'avait pas encore d'instrumens de passages, on se servait

Digitized by Google

d'un instrument appelé *quart de cercle*, parce que c'était en effet un quart de cercle en cuivre, dont le *limbe* était divisé en degrés, minutes et secondes. Voyez *fig.* 14. Au centre *C* du cercle est attaché un fil à-plomb, qui représente la verticale du lieu, et qui doit toujours, pendant les observations, répondre au même point du limbe. L'instrument porte une lunette mobile autour du centre, et munie d'un micromètre à fils. Pour observer, on dirige la lunette vers l'astre, on note exactement l'instant de son passage au centre des fils, et l'arc *OP* lu sur le limbe, fait connaître l'angle *SCZ*, c'est-à-dire, la distance de l'astre au zénith, ou le complément de sa hauteur. Après avoir fait cette observation d'un côté du méridien, on dirige l'instrument de l'autre côté, en le faisant tourner sur son pied, autour de la verticale, sans toucher la lunette, en ayant toujours soin que le fil à-plomb réponde au même point du limbe. Alors on attend que l'astre revienne à la même hauteur. On observe son passage au centre des fils, comme la première fois, et prenant une moyenne arithmétique entre les deux époques, on a l'instant du passage de l'astre au plan du méridien, telle qu'on l'aurait observé directement. Mais, comme nous l'avons annoncé, l'époque ainsi déterminée exige, en général, une correction dépendante des changemens que la réfraction éprouve. Si l'astre observé a un mouvement propre, elle exige encore une autre correction dépendante des variations de sa hauteur. C'est ce que l'on nomme l'*équation des hauteurs correspondantes* (*).

(*) Cette correction est fondée sur la connaissance des lois du mouvement diurne. On la trouvera dans la note 4 à la fin du livre.

Digitized by Google

Si l'astre observé est le soleil, il faut une précaution de plus. Comme on ne peut pas apprécier le centre de son disque, on observe l'un de ses bords, le supérieur ou l'inférieur. Seulement pour que la correspondance des hauteurs soit exacte, il faut que les observations soient faites sur des bords de même dénomination. Par exemple si le matin on a observé l'époque à laquelle le bord supérieur est venu, en s'élevant, toucher le fil horisontal, on doit le soir observer l'époque où le bord supérieur quitte ce même fil, en descendant.

Nous n'avons supposé qu'un seule couple d'observations. On peut en faire plusieurs en détachant la lunette et la portant successivement sur divers points du limbe, pour pouvoir observer l'astre à des hauteurs différentes, puis la replaçant ensuite sur les mêmes points pour les observations correspondantes, d'après la lecture de la division. Chaque couple d'observations, si l'on a bien opéré, donne le même instant du passage au méridien. La moyenne arithmétique, prise entre tous les couples, la donnera plus exactement, par le principe des compensations, parce qu'une partie des erreurs des observations doit très-probablement s'entre-détruire. Si l'astre observé a un mouvement propre, comme le soleil, on applique à cette moyenne la correction dépendante de ce mouvement pendant l'intervalle des observations. Les hauteurs correspondantes, observées de cette manière, sont d'autant plus grandes, qu'elles sont prises plus près du plan du méridien : la hauteur méridienne est donc la plus grande de toutes. Elles croissent jusqu'à ce terme, et ensuite diminuent. Dans le passage d'un de ces états à l'autre, elles n'éprouvent ni accroissement, ni diminution sensible. La direction du mouvement de l'astre doit donc alors paraître parallèle à l'horison. C'est ce que l'on observe en effet,

Digitized by Google

dans la lunette de l'instrument des passages, car les astres, en la traversant, suivent le fil horisontal du micromètre qui y est placé. Au fil à-plomb du quart de cercle, on a d'abord substitué le niveau qui est beaucoup plus sensible, et qui indique par conséquent bien mieux les petits changemens d'inclinaison. Enfin, on est parvenu à se passer de la correspondance des hauteurs, et à conclure le passage au méridien, d'après des *hauteurs absolues* observées d'un seul côté de ce plan, au moyen de l'instrument que l'on nomme un *cercle répétiteur*. Cette dernière méthode peut même être rendue au moins aussi précise que les observations immédiates faites avec l'instrument des passages; mais elle suppose des réductions fondées sur la connaissance des lois du mouvement diurne, et nous en parlerons plus loin. Si j'ai indiqué ici la méthode des hauteurs correspondantes, c'est parce qu'elle prouve très-simplement que le plan du méridien partage la révolution diurne de toutes les étoiles, en deux portions symétriques en durée. D'ailleurs on peut l'employer utilement dans les voyages, pour trouver l'instant du passage d'un astre au méridien, lorsqu'on est dépourvu de lunette méridienne et d'instrumens propres à mesurer des hauteurs absolues avec une grande précision.

79. Le plan du méridien étant déterminé par la mesure du tems, comme nous venons de le dire, on place à l'horison, et à une grande distance, une mire que l'on amène, par des essais multipliés, à répondre au centre des fils de l'instrument des passages. Alors, il suffit de diriger la lunette sur cette mire, pour savoir si elle a éprouvé quelque dérangement, et il est bon de répéter fréquemment cette vérification. Il est également utile de placer ainsi deux mires dans les directions opposées, où l'on peut amener la lunette par la rota-

Digitized by Google

tion. Si l'on perce ces mires au centre, et qu'on place derrière elles un réverbère dont la lumière passe par cette ouverture, on pourra vérifier la direction de la lunette, même de nuit, ce qui est important pour la sûreté des observations (*).

80. Cette direction prolongée dans le plan de l'horison est la vraie *ligne méridienne*, ou simplement la *méridienne* du point de la surface terrestre où l'instrument est placé. Prolongée indéfiniment, elle détermine dans le ciel deux points opposés qui sont le vrai *nord* et le vrai *sud*. Ce dernier s'appelle encore le *midi*.

81. Si par le centre de l'instrument on conçoit une ligne droite horisontale qui passe par son axe, perpendiculairement à la méridienne, cette ligne se nomme la *perpendiculaire*. Prolongée indéfiniment sur le plan de l'horison, elle déterminera aussi dans le ciel deux points opposés qui sont les vrais points d'orient et d'occident, ou l'*est* et l'*ouest*. On désigne encore l'est, l'ouest, le nord et le sud, sous la dénomination commune de *points cardinaux*.

82. La méridienne, la perpendiculaire et la verticale forment, dans chaque lieu de la surface terrestre, trois axes rectangulaires auxquels on peut rapporter tous les points de l'espace. Mais comme les observations des astres se font toujours par des angles, on a adopté, en astronomie, les coordonnées angulaires de préférence aux

(*) On voit à Paris deux mires ainsi disposées qui répondent à la méridienne de l'Observatoire. L'une est placée, au nord, sur la façade du palais du Luxembourg; l'autre est, au sud, sur une pyramide élevée dans la plaine, sur la route d'Arcueil. On peut obtenir les mêmes vérifications par les seules observations astronomiques au moyen de la méthode indiquée dans la note de la p. 73.

Digitized by Google

coordonnées rectilignes. La direction d'un rayon visuel mené à un objet se détermine par sa distance au zénith et par l'angle que la projection du rayon visuel sur l'horison forme avec la ligne méridienne. Cet angle se nomme l'*azimuth* de l'objet. On le compte à volonté depuis le point nord de la méridienne ou depuis le point sud, et d'occident en orient ou d'orient en occident. On appelle aussi azimuth d'un vertical l'angle dièdre formé par ce vertical avec le plan du méridien. Il est visible en effet que cet angle est égal à celui que les traces horisontales du méridien et du vertical forment entre elles, puisque ces traces sont toutes deux perpendiculaires à la verticale, commune intersection des deux plans.

63. Quand on connaît les lois du mouvement diurne, on peut, par un calcul très-simple, trouver l'azimuth d'un astre d'après la seule observation de sa hauteur et du tems qui s'écoule entre son passage au méridien et son arrivée au vertical où on l'observe. On peut aussi mesurer directement les azimuths au moyen d'un cercle horisontal et gradué, sur lequel on détermine la direction de la méridienne. Un second cercle aussi gradué et muni d'une lunette à micromètre est perpendiculaire sur le premier, et peut tourner autour de la verticale qui passe par son centre. Ce second cercle représente les plans verticaux. Lorsqu'on veut observer on le dirige dans le vertical de l'astre. On amène celui-ci dans le champ de la lunette et on le place au centre des fils. Alors la division du cercle vertical donne la hauteur de l'astre sur l'horison, ou sa distance au zénith qui est le complément de cette hauteur. La division marquée sur le cercle horisontal ou *azimuthal* donne la direction de la trace horisontale du vertical de l'astre ou son azimuth au moment de l'observation. Cela suppose

Digitized by Google

que l'on a préalablement déterminé le point du limbe qui répond à la direction de la méridienne. On y parvient par des hauteurs correspondantes, ou en se dirigeant sur une mire méridienne très-éloignée, placée préalablement à l'aide de l'instrument des passages. L'instrument que nous venons de décrire se nomme un *cercle entier* (*).

84. Si on le dirige sur une étoile quelconque, à des époques différentes, mais également éloignées de l'instant de son passage au méridien, on trouve, comme nous l'avons dit précédemment, que les hauteurs de cette étoile sont égales; on trouve de plus que ses azimuths sont égaux.

Si l'on fait cette observation sur une étoile qui ne se couche point, on trouve que son plus grand écart, de part et d'autre du méridien, répond aussi à des azimuths égaux. Seulement ces azimuths varient d'une étoile à l'autre.

Cette correspondance parfaite qui s'observe entre les phénomènes du mouvement diurne, de part et d'autre du méridien, indique avec évidence que l'axe de rotation du ciel est situé dans ce plan. Cherchons donc à y découvrir, à y déterminer sa position.

(*) Comme ces instrumens sont d'une construction difficile, et qu'on peut y suppléer, ainsi qu'on le verra plus loin, par le calcul des azimuths, d'après le tems et la hauteur, ils sont extrêmement rares. Il en existe un très-magnifique dans l'observatoire de Piazzi, à Palerme, et c'est avec lui que ce célèbre astronome a fait ses plus belles observations. La supposition d'un pareil instrument facilite beaucoup la démonstration du mouvement circulaire des astres; c'est pourquoi j'en ai parlé ici.

Digitized by Google

CHAPITRE VIII.

Direction de l'axe de rotation du Ciel. Description et usage du Quart de cercle mural. Détermination de la hauteur du Pôle. La Terre est comme un point dans les espaces célestes.

85. S'IL existait une étoile qui fût placée précisément sur l'axe de rotation du ciel, elle paraîtrait constamment immobile dans le plan du méridien. On ne voit aucune étoile qui satisfasse exactement à cette condition; mais en regardant vers le nord, on en découvre une, assez brillante, dont le mouvement est si lent et les changemens de position si peu considérables, qu'on ne peut guères les appercevoir qu'avec le secours des instrumens. Cette étoile est donc peu éloignée de l'axe de rotation. On la nomme l'*étoile polaire*.

Elle est facile à reconnaître par sa proximité d'un groupe d'étoiles très-remarquable que l'on nomme la *grande ourse* ou le *chariot*. Il est composé de sept étoiles très-brillantes, *fig.* 15, dont quatre sont disposées à-peu-près en carré, tandis que les trois autres forment, par leur alongement, une sorte de *queue* ou de *timon*. Si, par les deux étoiles du carré les plus éloignées de la queue, on conçoit une ligne droite, ou plutôt un plan visuel mené par l'œil de l'observateur, ce plan passera très-près de l'étoile polaire qui est désignée par *P* dans la figure.

Digitized by Google

Celle ci elle-même termine un autre groupe composé de sept étoiles comme la grande ourse et absolument semblable, si ce n'est qu'il est placé dans une situation contraire. On le nomme *la petite ourse*; et l'étoile polaire est la plus brillante de celles qui le composent. Parmi les divers groupes d'étoiles que l'on remarque dans le ciel et que l'on a classés sous le nom de *constellations*, il n'y en a aucun qui présente les mêmes figures que les deux précédentes; et il est très-aisé de les reconnaître la nuit, en regardant le ciel, par un tems serein.

86. C'est donc principalement vers ces étoiles, qui ne se couchent jamais, du moins dans nos climats, qu'il faut diriger nos recherches; car la lenteur de leur marche et la petitesse des cercles qu'elles décrivent, indiquent assez qu'elles sont les moins éloignées de l'axe de rotation. Mais comme les observations de leurs passages, dans le plan du méridien, nous ont déja appris la symétrie de leur marche, de part et d'autre de ce plan, c'est dans ce plan même qu'il faut les étudier, en observant à quelles hauteurs elles s'élèvent et elles s'abaissent. Il nous devient donc nécessaire d'avoir un instrument propre à mesurer les hauteurs méridiennes des astres avec une grande précision.

Pour mesurer les hauteurs méridiennes, on emploie communément, dans les grands observatoires, un instrument que l'on nomme un *mural*. C'est un grand cercle en cuivre, que l'on a coutume d'appuyer contre une muraille solide, et c'est de là que lui est venu son nom. Voyez *fig.* 16. Il serait peut-être plus avantageux pour l'exactitude, de le faire supporter par des colonnes, en lui conservant la liberté de tourner autour de la verticale qui passe par son centre; car à l'aide d'un pareil mouvement on pourrait obtenir plusieurs vérifications importantes. Mais peut-être aussi cette construction ferait-

Digitized by Google

elle perdre à l'instrument quelque chose de son immobilité (*). Le limbe *AB* est divisé, avec une extrême exactitude, depuis o jusqu'à 90°, ou suivant telle autre division de la circonférence que l'artiste a voulu choisir. L'alidade qui porte la lunette, est munie d'un vernier (**) armé de microscopes, de sorte que l'on peut ainsi apprécier les plus petites subdivisions. C'est en cela que la grandeur de l'instrument est utile, parce qu'elle aggrandit les dimensions absolues des arcs qu'il faut évaluer, par la lecture, sur le limbe. L'instrument doit être placé de manière que le rayon *CA*, mené de son centre au point o de la division du limbe, soit exactement vertical. Pour cet effet, l'artiste détermine avec un soin extrême deux points *C' A'*, de manière que la ligne *C'A'* soit parallèle à *CA*, et il suspend en *C* un fil à-plomb, très-fin, qui doit toujours venir battre sur le point *A'* finement marqué sur le limbe, ce dont on s'assure avec le microscope, avant et après les observations. La lunette du mural porte, à son foyer, un micromètre à deux fils fixes, l'un horisontal, l'autre vertical. Celui-ci ne sert que pour rendre l'axe optique parallèle au limbe de l'instrument, condition indispensable, pour que les arcs mesurés sur le limbe soient égaux à ceux que l'axe optique décrit. On y parvient

(*) Il existe à Bleinheim, en Angleterre, un superbe mural qui tourne ainsi sur des colonnes. Il a été construit par le célèbre artiste Ramsden.

(**) Le vernier étant un instrument très-utile et d'une application générale pour toute sortes de recherches exactes, on en trouvera la description dans la note 5, à la fin du livre. Ordinairement le vernier du mural ne sert que pour évaluer les minutes de degré. Pour évaluer les secondes, on se sert d'une vis micrométrique dont la tête porte un cadran divisé. Au moyen de cette vis on amène la

Digitized by Google

à l'aide d'un instrument que l'on nomme *lunette d'épreuve*, et qui sert dans une infinité de circonstances. C'est une lunette ordinaire, terminée par deux collets de cuivre carrés, travaillés de manière que leurs faces opposées soient parfaitement parallèles. Voyez *fig.* 17. On place au foyer de cette lunette, un fil fixe que l'on rend parallèle aux faces du carré : le parallélisme s'obtient à force d'essais. On pose la lunette sur un plan bien uni et horisontal ; on la dirige vers un point éloigné, et on la retourne sur la face opposée. Si le fil répond encore au même point, il est évident qu'il est parallèle aux plans des faces. Cela fait, on applique la lunette d'épreuve sur le mural, on la dirige vers un objet éloigné, et on remarque le point où il est coupé par le fil ; alors on amène sur ce même point le fil vertical de la lunette du mural, et l'*axe optique est réglé*. Il faut ensuite diriger tout le plan de l'instrument dans le plan du méridien ; on y parvient au moyen d'une mire éloignée, placée avec l'instrument des passages, ou par quelque autre méthode analogue ; mais il est bon de remarquer qu'une très-petite erreur sur cette direction, n'aurait aucune influence sur les hauteurs méridiennes observées, parce que l'arc décrit par les astres, près de leur passage au méridien, est sensiblement horisontal dans une petite étendue. Les choses étant ainsi disposées, lorsque l'étoile que l'on veut observer entre dans le champ de la lunette, on la place sous le fil horisontal, au moyen des vis de rappel

---

division du vernier en coïncidence avec celle du limbe, et l'on compte sur le cadran de la vis le nombre de tours et de fractions de tour qu'elle a faits. La valeur d'un tour ayant été une fois évaluée en secondes, on connaît la quantité de secondes qu'il faut ajouter aux minutes, d'après le nombre de tours parcourus.

Digitized by Google

qui font mouvoir l'alidade, et elle doit suivre ce fil si l'instrument est bien dirigé; mais c'est lorsqu'elle atteint le fil vertical, qu'elle se trouve précisément dans le plan du méridien. C'est donc alors, sur-tout, qu'il faut qu'elle soit coupée par le fil horisontal en deux parties bien égales. L'étoile passée, on ne touche plus à la lunette, et on lit l'arc marqué par le vernier, sur la division du limbe (*).

87. Pour voir maintenant le parti que nous pouvons tirer de cette opération, soit *ORS*, *fig.* 18, l'axe optique de la lunette dirigé vers l'étoile, lequel pourra très-bien ne pas passer par le centre *C* du quart-de-cercle. La distance au zénith cherchée est donc *ZRS*, ou *ZCS* en menant *SCO'* parallèle à *SO*. Si le point *O'* coïncidait précisément avec le zéro du vernier, porté par l'alidade mobile, l'arc lu sur le limbe serait *AO'*, c'est-à-dire la distance zénithale cherchée. Mais cela ne saurait arriver ainsi que par un hasard extraordinaire. Or si *V* est le zéro de l'alidade, et qu'il soit placé au-dessous du point *O'*, l'arc lu sur le limbe ne sera pas *AO'*, mais *AV*, c'est-à-dire, qu'il sera moindre que le véritable de la quantité *VO'*. Toutes les distances au zénith observées seront pareillement trop petites de cette même quantité; car puisque la direction de l'axe optique est fixe dans la lunette, la direction de l'axe central *SCO'* l'est également, et comme le zéro *V* du vernier l'est aussi par construction, puisqu'il tient à la lunette, la distance

(*) Si dans le même observatoire il se trouve un instrument des passages placé à peu de distance du mural, comme cela a lieu ordinairement, il faut, lorsque les deux instrumens sont réglés, que les étoiles passent au même instant dans l'un et dans l'autre au fil vertical du milieu de la lunette. Par conséquent, si l'instrument des passages a été d'abord dirigé avec exactitude, on peut, par cette comparaison, vérifier à-la-fois la direction du plan du mural suivant le méridien et le parallélisme de l'axe optique.

Digitized by Google

VO' sera constante ainsi que l'effet qui en résultera. Cette distance VO' s'appelle l'*erreur de collimation*. Ce serait le contraire si le point O' tombait au-dessous du point V; l'erreur de collimation serait soustractive des distances au zénith.

88. Il est facile de la corriger, *par le retournement*, lorsque l'instrument peut tourner autour de la verticale ZA, et prendre une position opposée à la première, voy. *fig.* 19; dans ce cas, on prolonge la division du mural un peu au-delà d'un quadrans dans sa partie inférieure, ou mieux encore, on pourrait compléter la demi-circonférence. Alors, si l'on observe de nouveau la même étoile dans cette seconde position, on devra la retrouver à la même hauteur, abstraction faite des petites variations dues aux changemens de la réfraction, de la précession, de l'aberration et de la nutation dans l'intervalle, toutes choses auxquelles on peut avoir égard. En tenant compte de ces petits changemens, si cela est nécessaire, on devrait retrouver la même distance au zénith et le même arc sur le limbe. Mais cela est impossible si l'erreur VO' n'est pas nulle; car le point V qui se trouvait au-dessous du point O' dans la *fig.* 18, se trouve maintenant au-dessus dans la *fig.* 19, précisément de la même quantité. L'arc AV, lu sur le limbe, sera donc trop fort autant que le premier était trop faible. Par conséquent, la différence de ces arcs sera double de l'erreur de collimation; et la moitié de cette différence sera l'erreur de collimation elle-même, qu'il faudra appliquer à toutes les distances zénithales observées avec le même mural; puisqu'elle est la même pour toutes, du moins en supposant que le mouvement de la lunette autour de l'axe du quart-de-cercle soit parfaitement circulaire, et que le limbe de l'instrument soit parfaitement bien divisé. Il est d'ailleurs évident que cette correction restera constante tant qu'on

Digitized by Google

ne touchera point aux fils du micromètre, mais elle variera si l'on change l'axe optique (*).

Dans les observatoires dont le mural ne peut pas se vérifier ainsi, on y supplée par d'autres moyens analogues ; par exemple, en observant des étoiles dont la vraie hauteur méridienne, dans le lieu de l'observation, a été déterminée par quelque autre procédé. Nous donnerons plus loin la description d'un instrument qui est exempt de toutes ces vérifications; c'est le *cercle* répétiteur. Mais son usage suppose que l'on connaît les lois du mouvement diurne, et ce sont ces lois que nous nous proposons d'établir. C'est pourquoi j'ai préféré de mettre d'abord en avant l'usage du mural que l'on peut facilement concevoir, qui ne suppose rien que nous n'ayons vu, et qui, d'ailleurs, est encore d'un usage général dans tous les grands observatoires de l'Europe. Essayons donc d'en faire l'application à la recherche de l'axe de rotation du ciel.

89. Si, par l'effet du mouvement diurne, toutes les étoiles décrivent des cercles autour de l'axe de rotation du ciel, comme les apparences semblent l'indiquer, un observateur qui serait placé précisément sur cet axe, verrait toutes les étoiles dans leur passage au méridien, s'en écarter également au-dessus et au-dessous ; de sorte que la direction de l'axe serait exactement intermédiaire entre les distances méridiennes d'une même

(*) Soient D, D' les arcs observés, pour la même étoile, dans les deux positions opposées du mural ; Z, la distance au zénith véritable ; E l'erreur de collimation ; on aura, dans la première position, $D+E=Z$; dans la seconde, $D'-E=Z$, par conséquent, $E=\frac{D'-D}{2}$; et $Z=D'-E=\frac{D'+D}{2}$. Le mural de Bleinheim se vérifie de cette manière, par le retournement.

Digitized by Google

étoile au zénith. Car, soit *HZH*, *fig.* 20, le plan du méridien qui contient l'axe de rotation; *HH* la projection du plan de l'horison ou la ligne méridienne; *OZ* la verticale; *OS OS'* les rayons visuels menés de l'observateur *O* à l'étoile dans ses deux passages; enfin *OP* la direction de l'axe de rotation que l'on suppose aussi passer par l'œil de l'observateur. Cela posé, si l'étoile décrit un cercle autour de l'axe *OP*, le diamètre *SS'* de ce cercle, sera divisé, par l'axe, au point *P* en deux parties égales, et les angles *POS*; *POS'*, l'un au-dessus, l'autre au-dessous de cet axe seront égaux entre eux. D'où il suit que l'angle *POZ*, ou la distance de l'axe de rotation au zénith, sera égal à la demi-somme des distances méridiennes *SOZ*, *S'OZ* de l'étoile dans ses deux passages, ou, ce qui revient au même, sera une moyenne arithmétique entre ces distances.

90. Ce raisonnement s'applique à toutes les étoiles dont on voit la révolution entière. Ainsi en les comparant dans leurs passages supérieurs ou inférieurs, elles devraient toutes s'accorder à donner le même résultat moyen, et par conséquent la même distance du zénith à l'axe de rotation. On voit également que ce caractère est particulier à la position de l'observateur que nous avons supposée. La même condition n'aurait plus lieu si l'axe de rotation ne passait pas par l'œil de l'observateur, et la demi-somme des distances méridiennes d'une même étoile ne serait plus constante. L'observation de ces distances, en divers lieux de la terre, est donc propre à nous apprendre si quelqu'un des points de sa surface est situé sur l'axe de rotation du ciel.

90. Mais comme la réfraction causée par l'atmosphère augmente les hauteurs apparentes des astres, et, par conséquent, diminue leur distance au zénith, ainsi que nous

Digitized by Google

DÉSIGNA

1792. 27 décem

Même jo

1793. 30 février

7 février

1793. 20 janvier

22 janvier

UNIV. OF MICH.

Digitized by Google

Digitized by Google

l'avons déja annoncé plus haut, il faudra avoir égard à cette altération en comparant les distances méridiennes; et emprunter, pour cela, dans les tables de réfractions, les corrections convenables pour chaque distance. Ceci au reste, ne sera point une pétition de principes. Car bien que les corrections données par ces tables puissent se tirer des observations elles-mêmes, ainsi qu'on le verra bientôt, on peut cependant les déduire aussi, et avec une rigueur au moins égale, d'expériences purement physiques sur la constitution de l'atmosphère et sur la force réfringente de l'air, indépendamment d'aucune donnée astronomique, comme nous le verrons également.

91. Ceci bien entendu, je prendrai pour exemple les observations suivantes; de distances méridiennes, faites par Méchain, au fort de Montjouy, près Barcelonne; non pas avec un mural, mais par des moyens équivalens qui seront décrits plus bas (*).

92. La première colonne n'a pas besoin d'explication. Dans la seconde, on voit les distances moyennes apparentes, ou la demi-somme des distances supérieure et inférieure, telle qu'elle se déduit immédiatement des observations. Ces distances moyennes sont peu différentes entre elles; cependant, elles ne s'accordent pas encore tout-à-fait. Mais si l'on prend, dans les tables de réfractions, les corrections qui s'y rapportent dans les circonstances atmosphériques indiquées, et qu'on ajoute ces corrections, qui sont toujours additives, aux distances au zénith données immédiatement par l'observation, on aura les distances vraies, telles qu'on les aurait observées

(*) J'extrais ces observations de l'excellent ouvrage de M. Delambre sur la mesure de la méridienne. Les nombres que je rapporte ne sont que ceux qu'il a donnés dans cet ouvrage, sans aucun changement.

Digitized by Google

sans l'interposition de l'atmosphère ; et la moyenne arithmétique, entre les deux distances, sera la distance moyenne corrigée, dont on voit les valeurs dans la dernière colonne. Toutes ces valeurs s'accordent entre elles de manière à ne laisser aucun doute ; car celle qui s'écarte le plus des autres est ζ de la grande ourse, pour laquelle la réfraction est de beaucoup la plus forte dans son passage inférieur ; de sorte qu'il peut bien y avoir quelque incertitude sur cet élément, même en se servant des tables. En effet, très-près de l'horison, les variations de l'atmosphère, comme on le verra par la suite, causent beaucoup d'irrégularité dans les réfractions. D'ailleurs, nous ne comparons ici que deux observations de chaque étoile. Nous aurions sans doute plus d'exactitude si nous en réunissions un plus grand nombre dont nous prendrions la moyenne. Enfin, cet écart de 7″ que donne ζ de la grande ourse, est lui-même une quantité fort petite dans les lunettes de nos cercles, où il répond à-peu-près à l'angle visuel soutendu par l'épaisseur du fil ; d'où l'on conçoit qu'il est bien possible que l'on se trompe de cette quantité dans une seule observation. Il est donc naturel de regarder les différences données par nos diverses étoiles, comme accidentelles, et comme susceptibles de disparaître si on accumulait les observations; et alors l'accord qu'elles présentent prouve que l'axe de rotation du ciel passait, à Montjouy, par l'œil de l'observateur.

93. Mais ce qui est bien remarquable, ces résultats ne sont pas particuliers au lieu où Méchain se trouvait alors ; car à la suite des observations de Montjouy, j'en ai rapporté d'autres faites à Paris, par M. Delambre ; et elles donnent, pour les différentes étoiles, des distances moyennes qui s'accordent également les unes avec les autres.

Digitized by Google

94. Enfin pour montrer que cet accord n'est point l'effet du hasard, j'ai encore rapporté dans un troisième tableau d'autres observations faites par Méchain, à l'Observatoire de Paris, c'est-à-dire, dans un lieu bien peu éloigné de l'observatoire de M. Delambre. Elles donnent, pour la distance moyenne, des valeurs différentes des précédentes; mais ces moyennes s'accordent aussi entre elles, ou du moins les écarts qu'elles présentent sont si petits qu'on peut les regarder pareillement comme accidentels.

Dans quelque lieu de la terre que l'on observe, et on a observé dans un très-grand nombre, on trouve constamment ce même accord, abstraction faite des petites erreurs irrégulières des observations: *l'axe de rotation du ciel semble toujours passer par l'œil de l'observateur.*

95. Cette singulière apparence ne peut s'expliquer que d'une manière: en supposant que l'axe de rotation du ciel passe par l'intérieur de la terre; et en admettant, de plus, que les dimensions de la terre, comparées à l'éloignement des étoiles, sont d'une petitesse presque infinie. Alors, en effet, les rayons visuels menés des divers points de la terre à une même étoile, doivent paraître parallèles; ou, ce qui revient au même, la terre, vue de la distance des étoiles, ne sera, dans les espaces célestes, que comme un point dont les dimensions sont insensibles.

96. Ce résultat est confirmé par tous les phénomènes astronomiques. Les étoiles, vues dans les plus forts télescopes, qui grossissent jusqu'à 200 fois les dimensions des images, n'ont pas encore un disque d'une étendue appréciable. Elles paraissent comme des points brillans. Cependant, avec ces instrumens, on les voit comme si elles étaient 200 fois plus rapprochées de nous. Si l'on

Digitized by Google

n'y observe pas de différence, c'est une preuve que ces astres sont à une distance immense de nous, puisqu'ils pourraient se rapprocher dans une pareille proportion, sans que leur diamètre apparent augmentât d'une quantité sensible. Le disque du soleil et celui de la lune étant vus de la même manière, paraissent bien plus grands qu'à la vue simple, sur-tout la lune, qui laisse ainsi appercevoir sur sa surface des montagnes et des cavités. Le disque des planètes éprouve de même, par le télescope, un grossissement considérable, et quelques-unes d'entre elles, telles que Mercure et Vénus, étant vues de cette manière, présentent des *phases* comme la lune. Ces astres sont donc bien plus rapprochés de nous que les étoiles. Aussi, en les observant avec un grand soin de plusieurs points de la terre différens et très-éloignés, est-on parvenu à reconnaître, dans leurs positions respectives, des différences d'aspect très-sensibles. Ainsi, quand le soleil est éclipsé par la lune qui s'interpose entre cet astre et nous, l'éclipse n'est jamais générale pour toute la terre, comme cela devrait être si le soleil et la lune étaient infiniment éloignés. Il y a toujours certains lieux dans lesquels on voit le disque du soleil tout entier; d'autres le voient éclipsé en partie et comme échancré par l'interposition d'un corps arrondi sur une portion de sa surface; d'autres le voient plus échancré encore, selon que leur rayon visuel s'approche plus ou moins de la ligne droite qui joint les centres du soleil et de la lune. Pour le soleil, les différences d'aspect sont beaucoup moindres; on ne peut les appercevoir que par des opérations très-délicates, faites avec des instrumens extrêmement précis. Cependant, on est parvenu à mesurer l'angle que formeraient deux rayons visuels menés au soleil des deux extrémités les plus opposées de la terre, et

Digitized by Google

cet angle est de 8″.58 sexagésimales ; mais pour les étoiles, aucun de ces procédés n'a pu réussir. Bien plus, on est parvenu à mesurer la distance de la terre au soleil ; on l'a trouvée égale à 24096 fois le rayon de la terre, celle-ci étant supposée sphérique. On est parvenu à former sur cette distance, comme base, un triangle, dont le sommet était placé sur une étoile quelconque, et l'angle, au sommet de ce triangle, conclu des mesures les plus précises que l'on a pu faire, s'est encore trouvé absolument insensible. Cependant, si la distance des étoiles n'excédait pas cinq mille millions de fois le rayon de la terre, on serait certain de la mesurer par ce procédé. Puisque la base employée est encore trop petite pour qu'il soit applicable, c'est une preuve que les étoiles sont encore beaucoup plus éloignées que cette limite. D'après cela, nous ne devons point nous étonner qu'elles présentent les mêmes aspects dans tous les lieux de la terre où on les observe, et que l'axe de rotation du ciel, dont la direction traverse la terre, comme les observations viennent de nous l'apprendre, semble, dans tous les lieux de sa surface, passer par l'œil de l'observateur.

97. La direction de cet axe, prolongée indéfiniment, déterminera, dans le ciel, deux points opposés, que l'on nomme les *pôles de rotation*, ou simplement les *pôles*, autour desquels les étoiles paraissent tourner, en un jour sydéral, à des distances inégales, et avec d'inégales vitesses, selon la grandeur du cercle ou elles seront placées. Un de ces points s'appelle le *pôle nord*, l'autre le *pôle sud*, selon la partie du ciel où il est situé. Le pôle nord est très-voisin de l'étoile qui termine la queue de la petite ourse, et que nous avons appelée la *polaire*. C'est de là que lui vient cette dénomination. Toutes les étoiles qui, comme la polaire, restent toujours sur l'horison et sont

Digitized by Google

constamment visibles, se nomment *étoiles circompolaires*, parce qu'elles sont situées autour et près du pôle.

On appelle encore le pôle nord *pôle boréal*, et le pôle sud *pôle austral*. On nomme aussi le premier, *pôle arctique*, c'est-à-dire, situé du côté de la constellation de l'ourse; le second *pôle antarctique*, c'est-à-dire, opposé à l'ourse.

98. Les observations de distances méridiennes que nous avons rapportées, et celles du même genre que l'on peut faire dans tous les lieux de la terre, détermineront la distance du zénith de l'observateur à l'axe de rotation du ciel, distance dont le complément sera l'inclinaison de cet axe sur l'horison du lieu ou *la hauteur du pôle*. Et comme, à cause de la rondeur de la terre, le plan de l'horison prend, dans chaque pays, une direction diverse, relativement aux points de l'espace, l'axe de rotation paraîtra inégalement incliné sur les horisons des différens pays. Par exemple, les observations de Méchain, à Montjouy, étant toutes réunies, donnent 48°.38′.15″.04 pour la distance angulaire du pôle au zénith, d'où il résulte 41°.21′.44″.96 pour la hauteur du pôle sur l'horison de Montjouy. A Paris, à l'Observatoire, cette même hauteur est 48°.50′.13″, d'après les observations de Méchain que nous avons rapportées. Ce qui s'accorde avec la moyenne de plus de 5000 observations faites par lui et par M. Delambre.

Si le mouvement diurne des astres est réellement circulaire autour de cet axe, il doit exister, entre les positions successives d'un même astre sur l'horison, certains rapports géométriques dépendans de cette loi. C'est en effet ce qui a lieu avec la dernière exactitude, comme on le verra dans le chapitre suivant.

Mais auparavant, pour compléter les notions que

Digitized by Google

j'ai données, relativement à l'usage du quart de cercle mural, je dois indiquer comment on observe les hauteurs méridiennes des astres dont le disque a une étendue sensible, comme le soleil, la lune, et la plupart des planètes. L'artifice que l'on emploie est le même que pour les passages au méridien : on observe successivement les hauteurs des deux bords et l'on prend le milieu entre elles. Cette opération exige de la promptitude et de la dextérité, parce que ces deux observations doivent se faire pendant que l'astre traverse le champ de la lunette, de sorte que si l'on commence par mettre le fil horisontal en contact avec son bord supérieur, il faut lire promptement la distance au zénith sur le limbe du quart de cercle, et mettre ensuite le fil en contact avec l'autre bord avant que l'astre soit sorti du champ. Pour avoir le tems nécessaire, on fait la première observation un peu avant que le sommet du disque arrive au fil vertical, et la seconde un peu après qu'il l'a dépassé. Il est vrai que, par ce moyen, aucune des deux distances n'est observée exactement dans le plan du méridien ; mais à une très-petite distance de ce plan. Toutefois, il n'en peut ordinairement résulter une erreur, parce que le mouvement de l'astre est alors presque horisontal, ce qui fait qu'un écart de quelques secondes, à droite ou à gauche, n'a aucune influence sensible sur la distance au zénith ; on pourrait s'en assurer par le calcul, mais l'expérience le prouve, puisque le bord du disque, une fois placé sur le fil horisontal, le suit dans toute son étendue comme ferait une étoile. Cependant, si l'astre avait un mouvement propre en déclinaison très-rapide, on serait obligé d'y avoir égard dans des observations très-exactes, et cela a lieu pour la lune.

Je n'ai pas besoin de rappeler la nécessité d'éclairer

Digitized by Google

les fils du micromètre pendant la nuit, non plus que l'usage du verre noirci pour les observations du soleil. Ce que nous avons dit sur cet objet, à l'égard des passages, s'applique complettement ici.

Jusqu'à présent nous n'avons pas eu égard à l'épaisseur du fil, c'est-à-dire, à l'angle visuel qu'il soutend dans la lunette du micromètre. Mais, à parler exactement, la distance observée du bord supérieur au zénith est trop petite d'une quantité égale à la moitié de cette épaisseur. Car lorsqu'on rend le bord du fil tangent au disque, l'axe optique de la lunette passe par le centre du fil, et c'est cet axe qui détermine, sur le limbe, l'extrémité de l'arc observé. Par une raison semblable, la distance du bord inférieur au zénith est trop forte d'une égale quantité. Les erreurs se compensent donc exactement dans le calcul de la distance moyenne du centre, qui est la demi-somme des précédentes.

La compensation n'a plus lieu lorsque l'on veut mesurer, par cette méthode, le diamètre apparent du soleil, ou en général d'un astre quelconque. Car alors, on prend la différence des distances zénithales des deux bords, et dans cette opération, les deux erreurs dues à l'épaisseur du fil s'ajoutent au résultat réel. Il faut donc, pour avoir le diamètre apparent véritable, retrancher de cette différence le diamètre apparent du fil. Ce diamètre apparent est assez difficile à déterminer. On n'a pas même sur cela de méthode bien exacte. Mais on peut en approcher beaucoup, soit en mesurant exactement l'épaisseur réelle du fil, sa distance à l'objectif, et calculant, d'après ces données, l'angle visuel qu'il doit soutendre dans la lunette, soit en observant l'étendue de l'espace qu'il couvre sur un objet éloigné, placé à une distance connue. On conçoit qu'il importe de diminuer

Digitized by Google

cet angle autant qu'il est possible, et pour cela on choisit les fils métalliques les plus fins que l'on puisse se procurer. On se sert de fils métalliques pour éviter l'effet des variations hygrométriques qui pourraient, s'ils étaient faits d'autres matières, les détendre ou les déplacer.

Si l'on avait le dessein d'observer spécialement les diamètres apparens, on pourrait encore éluder l'effet de l'épaisseur du fil, en rendant le fil tangent extérieurement à l'un des bords et intérieurement à l'autre. Les distances zénithales des deux bords seraient alors toutes deux trop petites ou toutes deux trop grandes d'une égale quantité. Ainsi la différence donnerait le diamètre apparent de l'astre avec exactitude. Mais alors la distance méridienne du centre serait affectée d'une erreur égale à la demi-épaisseur du fil. Ceci fournirait même un nouveau moyen de déterminer cette épaisseur en rendant tour-à-tour le contact intérieur ou extérieur, et comparant les diamètres apparens d'un même objet obtenus par ces divers procédés.

Digitized by Google

CHAPITRE IX.

Détermination exacte des lois du Mouvement diurne. Preuve que ce mouvement est circulaire. Preuve qu'il est uniforme. Mesure du Tems par les arcs célestes.

99. Soit, dans un lieu quelconque de la terre, *fig.* 21, *NEM* le plan de l'horison, *NOM* la ligne méridienne, *EO* la perpendiculaire, *OZ* la verticale, ce qui forme, comme nous l'avons vu, un systême complet de coordonnées rectangulaires. Soit de plus *OP* l'axe de rotation du ciel passant en *O* par l'œil de l'observateur. Menons un rayon visuel *OS* à une étoile quelconque *S*, l'angle *POS*, formé par ce rayon avec l'axe de rotation, se nomme la *distance polaire* de l'étoile. Si l'étoile se meut circulairement autour du pôle, cette distance doit être invariable, et l'angle *POS* doit rester constant dans toutes les situations de l'étoile sur l'horison.

100. Reste à trouver à chaque fois cet angle *POS*. Cela est facile lorsque l'on connaît l'azimuth de l'étoile, sa distance au zénith, et la distance du zénith au pôle, c'est-à-dire, les angles *NOA*, *ZOS* et *ZOP*. Il suffit alors de résoudre un triangle sphérique. Car si, du point *O*, comme centre, on conçoit une sphère d'un rayon quelconque qui coupe l'axe de rotation, le rayon visuel et la verticale, aux points *P*, *S* et *Z*; les arcs *PZ*, *ZS*, *PS* qui joindront ces trois points sur la sphère, formeront

Digitized by Google

un triangle sphérique où l'on connaîtra les côtés ZP et ZS qui sont les distances du pôle et de l'astre au zénith, et l'angle PZS formé par le méridien PZ avec le vertical ZS de l'astre ; car cet angle est égal à l'azimuth NOA du vertical, compté du nord. Avec ces données, on connaîtra donc par le calcul le troisième côté PS, ou la distance polaire de l'astre (*).

(*) Soit A l'azimuth de l'astre, Z, sa distance zénithale, D, la distance du pôle au zénith, dans le lieu de l'observation, distance qui est le complément de la hauteur du pôle ; enfin, nommons p la distance polaire demandée : cela posé dans le triangle sphérique formé par les trois arcs D, Z et p, on connaîtra les deux premiers et l'angle compris A ; on aura donc, suivant les formules de la trigonométrie sphérique,

$$\cos p = \sin Z \,.\, \sin D \,.\, \cos A + \cos Z \,.\, \cos D.$$

Comme cette formule est incommode à évaluer par logarithmes, introduisons un angle auxiliaire φ, tel qu'on ait

$$\tang \varphi = \cos A \,.\, \tang D \;.\;.\;.\;.\; (1)$$

et en substituant, dans la première équation, pour $\cos A$, sa valeur tirée de cette dernière, elle devient

$$\cos p = \frac{\cos D \,.\, \cos (Z - \varphi)}{\cos \varphi} \;.\;.\;.\;.\; (2)$$

L'équation (1) donnera φ par les tables de logarithmes, lorsque l'on connaîtra A et D : avec ces valeurs et celle de Z, qui est connue, l'équation (2) donnera p par un calcul semblable : c'est la distance polaire demandée.

Si l'astre est observé immédiatement dans le méridien, du côté du nord, on a $A = 0$, ce qui donne $\varphi = D$, et par suite

$$\cos p = \cos (Z - D) \;.\;.\;.\;.\; (3)$$

Digitized by Google

101. Or, en effectuant ce calcul pour une étoile quelconque, dans tous les points de son cours où on peut l'observer, on trouve toujours la même valeur pour la distance polaire PS; *le mouvement diurne des étoiles autour des pôles est donc exactement circulaire.*

On a même sur cela une vérification très-simple, en

---

comme on l'aurait conclu directement des relations primitives entre les côtés du triangle sphérique. La formule (3) donne indifféremment en

$$p = Z - D \qquad \text{ou} \qquad p = D - Z;$$

mais comme il faut que la distance polaire soit positive, on choisira celle des deux racines qui satisfera à cette condition. La première aura lieu quand l'astre aura été observé, au méridien, au-dessous du pôle; la seconde, quand il aura été observé au-dessus comme en s; mais toujours du côté du nord, puisque $A = 0$.

Si, au contraire, l'astre eût été observé, au méridien, du côté du sud, on aurait eu $A = 180°$; $\cos A = -1$; $\tang \varphi = -\tang D$;

d'où $\varphi = 180 - D$, et par suite $\cos \varphi = -\cos D$; et enfin

$$\cos p = \cos \left\{ Z + D \right\}.$$

Or ici, la valeur positive de p étant la seule admissible, on a toujours

$$p = Z + D,$$

c'est-à-dire, que pour les astres observés dans le méridien, au sud du zénith, la distance polaire est la somme des distances zénithales de l'astre et du pôle. Tous ces résultats sont presque évidens par eux-mêmes; mais je les ai choisis exprès, afin de montrer, par cet exemple simple, comment on peut déduire, des formules analytiques, tous les résultats particuliers qu'elles renferment, en ayant soin seulement d'avoir égard à la règle des signes et sans recourir à une figure, pour chaque cas. Cette remarque nous sera d'une application continuelle dans le cours de cet ouvrage.

Digitized by Google

ce que cette valeur constante est précisément la distance polaire de l'astre qui s'observe immédiatement dans le plan du méridien ; car alors, le vertical de l'astre est le méridien lui-même. Si l'astre passe au méridien au sud du zénith, l'angle dièdre *PZS* ou *NOA* est égal à deux angles droits, et la distance polaire *PS* est la *somme* des distances zénithales de l'astre et du pôle, voy. *fig.* 22 ; si au contraire l'astre passe au méridien au nord du zénith, l'angle *NOA* est nul, et la distance polaire est la *différence* des distances zénithales de l'astre et du pôle, voy. *fig.* 20.

102. Ayant ainsi prouvé que le mouvement diurne est exactement circulaire, on peut se servir, et on se sert en effet, de cette vérité comme d'un principe ou d'une condition géométrique pour calculer complètement la position d'une étoile à un instant quelconque, d'après la seule observation de sa hauteur dans ce même instant ; pourvu que l'on connaisse d'ailleurs sa distance au pôle telle qu'on l'observe dans le plan du méridien. Car alors, dans le triangle sphérique *PZS*, on connaît les trois côtés *PZ*, *PS* et *ZS* qui est la distance de l'étoile au zénith au moment de l'observation. On peut donc calculer les trois angles de ce triangle, c'est-à-dire, l'angle *PZS* ou *NOA* qui est l'azimuth de l'astre, et les angles *ZSP* et *ZPS*, c'est-à-dire, l'angle à l'astre et l'angle au pôle (*).

(*) Soit, comme précédemment, D, la distance zénithale du pôle ; Z, celle de l'astre, et p, sa distance polaire ; en nommant A l'azimuth demandé, on aura, suivant les formules de la trigonométrie sphérique :

l'azimuth..... $\sin \frac{1}{2} A = \sqrt{\dfrac{\sin\left\{\frac{p+D-Z}{2}\right\} \sin\left\{\frac{p+Z-D}{2}\right\}}{\sin Z \,.\, \sin D}}$

Digitized by Google

103. La distance polaire *PS* étant constante pour chaque étoile, pendant toute la durée de sa révolution diurne, ainsi que nous venons de le démontrer par l'expérience, il s'ensuit que *le rayon visuel* OS, *mené à une étoile, décrit, dans son mouvement diurne, une surface conique droite, à base circulaire autour de l'axe de rotation du ciel.* La pointe de cette surface est située dans l'œil de l'observateur; mais on peut la transporter, par la pensée, au centre de la terre, puisque nous avons reconnu que, relativement à l'éloignement des étoiles, les dimensions de la terre sont insensibles.

104. Le résultat auquel nous venons de parvenir, indique seulement une relation géométrique entre les rayons visuels menés à une même étoile dans les diverses parties de sa marche diurne, mais il ne détermine rien relativement à la distance des astres sur les prolongemens de ces rayons. Nous devrions donc rester, à ce sujet, dans un doute absolu puisque nous sommes dans une incertitude complète. Mais comme l'imagination aime à se reposer sur une idée fixe quelconque, nous supposons involontairement tous les astres placés à une grande distance sur les prolongemens des rayons qui nous les rendent visibles, et comme nos sens ne nous offrent non plus aucun terme de comparaison qui puisse nous faire juger

---

De même, si l'on nomme S l'angle à l'astre, et P l'angle au pôle, on aura

l'angle à l'astre.. $\sin \frac{1}{2} S = \sqrt{\dfrac{\sin\left\{\frac{D+p-Z}{2}\right\} \sin\left\{\frac{D+Z-p}{2}\right\}}{\sin Z \,.\, \sin p}}$

l'angle au pôle.. $\sin \frac{1}{2} P = \sqrt{\dfrac{\sin\left\{\frac{Z+p-D}{2}\right\} \sin\left\{\frac{Z+D-p}{2}\right\}}{\sin p \,.\, \sin D}}$

Digitized by Google

si les uns sont plus éloignés et les autres plus près; nous les plaçons encore involontairement à un éloignement égal. C'est là ce qui produit cette apparence de la voûte sphérique étoilée, si belle à observer pendant la nuit dans un tems serein. Si, pour nous prêter à cette illusion de nos sens, nous concevons, par la position apparente de chaque étoile, un plan perpendiculaire à l'axe de rotation du ciel, l'étoile, dans son mouvement diurne, ne sortira pas de ce plan; et sa route ainsi projetée sur le ciel sera une circonférence de cercle. Dans ce sens, on peut dire, *les cercles que les étoiles semblent décrire par l'effet du mouvement diurne, sont situés dans des plans perpendiculaires à l'axe de rotation du ciel.*

105. Il ne reste plus qu'à savoir si ce mouvement circulaire est uniforme ou variable. Pour le découvrir, soient S S' S'', *fig.* 23, les positions successives de l'étoile sur son cercle, depuis son passage au méridien au point M. Les arcs MS, MS' seront perpendiculaires au plan du méridien, et aux plans visuels menés à chaque instant par l'étoile et par l'axe de rotation. Les angles dièdres ZPS, ZPS', ZPS'', formés par ces plans avec le plan du méridien, auront donc pour mesure les arcs MS, MS', MS'', c'est-à-dire, leur seront proportionnels.

Reste donc à évaluer ces angles dièdres ZPS. Or, c'est ce qui est facile, puisque dans le triangle sphérique ZPS on connaît les trois côtés, savoir : ZP, PS et ZS (*).

(*) Soit P l'angle dièdre ZPS, on a, d'après les formules rapportées dans la page précédente,

$$\sin \tfrac{1}{2} P = \sqrt{\frac{\sin\left\{\frac{Z+p-D}{2}\right\} . \sin\left\{\frac{Z+D-p}{2}\right\}}{\sin p \, . \sin D}}$$

Digitized by Google

En effectuant le calcul, on trouve que l'angle *ZPS*, ou l'angle au pôle, est proportionnel au tems écoulé depuis le passage de l'astre au méridien, de manière que la circonférence entière est au nombre de degrés contenu dans cet angle, ou dans l'arc *MS* qui lui sert de mesure, comme la durée d'une révolution entière, ou un jour sydéral est au tems écoulé depuis le passage au méridien. Chacun des arcs *MS*, *MS'*, *MS''*, est donc décrit par l'astre, comme l'est la circonférence toute entière, c'est-à-dire, que le *mouvement diurne des étoiles est constamment uniforme dans toute l'étendue de leur révolution.* Quoique dans la figure nous ayons seulement considéré les arcs situés d'un côté du méridien, après le passage, il est visible que les mêmes raisonnemens s'appliqueraient aussi aux arcs situés de l'autre côté du méridien, avant que le passage ait eu lieu.

106. Cette vérité une fois reconnue, on peut s'en servir et on s'en sert en effet comme d'un principe ou d'une condition géométrique pour calculer l'angle au pôle *ZPS*, d'après le tems écoulé depuis le passage de l'astre au méridien, sans recourir à l'observation de sa hauteur. Car, soit *J* le jour sydéral et *t* l'intervalle de tems sydéral écoulé depuis le passage au méridien, on aura la valeur de *P* par la formule $P = 360° \frac{t}{J}$. Réciproquement, si l'angle au pôle est donné par l'observation de la hauteur de l'astre, on en peut conclure le tems $t = \frac{P.J}{360°}$ (*).

---

p est la distance polaire de l'astre; *Z* et *D* sont les distances zénithales de l'astre et du pôle : *p*, *D* et *Z* sont connus par l'observation.

(*) Cette formule ne peut s'appliquer qu'aux astres qui n'ont point

Digitized by Google

107. On a donné aux plans visuels POS, POS', POS'', le nom de *plans horaires*, parce que les arcs MS, SS', $S'S''$, qu'ils interceptent sur le cercle diurne de l'astre, répondent aux heures et aux fractions d'heures dans lesquelles on divise la durée de la révolution entière, ou le jour sydéral. Par exemple, si les angles dièdres des plans horaires sont de 15° sexagésimaux, ils intercepteront, sur le cercle diurne de l'astre, des arcs qui seront pareillement de 15°. Il y aura donc 24 de ces arcs dans la circonférence entière, puisque 24.15 valent 360; par conséquent chacun d'eux sera parcouru par l'astre dans la vingt-quatrième partie du jour sydéral, c'est-à-dire dans une heure sexagésimale. Cela se voit tout de suite par la formule $P = 360 \cdot \frac{t}{J}$; car en y faisant $P = 15°$; elle donne $T = \frac{J}{24}$.

Si au lieu de 24 plans, on n'en suppose que 10, ils intercepteront sur la circonférence des arcs de 40 degrés décimaux, et chacun de ces arcs répondra à une heure de la division décimale du jour. Alors la valeur de P, exprimée en mesures décimales est $P = 400^g \frac{t}{J}$; en y faisant $P = 40^g$, on a $t = \frac{J}{10}$.

108. Généralement, si l'on veut représenter les divisions du jour par les angles dièdres des plans horaires, ou par les arcs que ces plans interceptent sur le cercle diurne décrit par l'astre, on trouvera que, dans la division

---

de mouvemens propres; pour les autres, il faut préalablement tenir compte de l'effet de ce mouvement sur l'angle P, pendant le tems t. Nous en donnerons plus loin des exemples.

Digitized by Google

sexagésimale du cercle et du jour, 15° répondent à 1 heure, 15′ de degré à 1′ de tems, et 15″ de degré à 1″ de tems. Ainsi pour convertir un nombre de degrés, minutes et secondes d'arc, en heures, minutes et secondes de tems, il faut les diviser par 15. C'est le contraire pour convertir le tems en arc : il faut alors multiplier.

Dans la division décimale du cercle et du jour, 40 grades répondent à 1 heure ; 40′ de grade à 1 minute de tems ; 40 secondes de grade à 1″ de tems. Pour convertir les arcs en tems, il faut les diviser par 40 ; pour convertir le tems en arc, il faut multiplier par le même nombre.

Les divisions du cercle et du jour étant liées entre elles par ces rapports, elles peuvent se représenter les unes par les autres, et alors la mesure des arcs célestes est donnée par le tems qui s'écoule pendant leur passage au méridien.

Ainsi l'arc diurne, intercepté entre le méridien et le plan horaire d'un astre, ou ce qui revient au même, l'angle dièdre formé par le plan du méridien avec le plan horaire d'un astre, *étant converti en tems*, exprimera le nombre d'heures et de fractions d'heure écoulées depuis le passage de l'astre au méridien, ou qui doivent s'écouler jusqu'à son passage : c'est pourquoi ces angles dièdres sont désignés sous la dénomination d'*angles horaires*.

109. Rien dans ces rapports ne détermine l'époque à laquelle on commence à compter les heures. Dans la société, l'usage général est de partir du passage du soleil au méridien inférieur, ou de minuit, et de compter ensuite 24 heures d'un minuit à l'autre. Mais le mouvement du soleil étant inégal, comme on le verra plus loin, ce systême est pareillement variable, et il exige

Digitized by Google

quelque modification pour être rendu applicable à l'astronomie. Puis donc que nous sommes obligés de nous borner au tems sydéral jusqu'à ce que nous ayons expliqué ces inégalités, on peut toujours concevoir que, dans chaque lieu, l'on prenne pour commencement des heures sydérales le passage au méridien d'une étoile connue, ou d'un point du ciel déterminé, et qu'ensuite on continue à compter les heures à partir de l'instant de ce passage. Le nombre d'heures, de minutes et secondes écoulées depuis cette première époque, donne ce que l'on nomme le *tems absolu* ou *l'heure qu'il est*.

Dans le chapitre suivant, nous donnerons le moyen de calculer l'heure qu'il est dans le lieu où l'on se trouve, d'après la seule observation de la hauteur d'un astre quelconque et le calcul de son angle horaire ; mais il faut auparavant savoir comment on est parvenu à déterminer les positions relatives des astres dans le ciel, de manière à pouvoir assigner à chaque instant la situation de tous, étant donnée celle d'un d'entre eux.

110. Ces rapports constans entre les tems et les arcs célestes n'ont lieu en rigueur que pour les astres fixes dont la distance polaire est constante. Ceux qui ont un mouvement propre, comme le soleil, les planètes et les comètes, ont leur distance polaire variable ; par conséquent ils ne décrivent pas des cercles autour de l'axe de rotation du ciel, mais des lignes spirales résultantes de ces mouvemens composés. On ne peut donc pas leur appliquer exactement les raisonnemens que nous venons de faire, et qui sont fondés sur la forme circulaire de la courbe que l'astre décrit. Mais en étudiant les variations particulières dues à leurs mouvemens propres, on est parvenu à les connaître assez exactement pour les calculer d'avance. En dépouillant les astres de ces

Digitized by Google

inégalités, leur distance polaire peut être ensuite regardée comme constante ; leur mouvement propre comme nul ; et alors la loi du mouvement diurne, uniforme et circulaire se montre la même pour tous les astres, sans aucune exception.

111. On a représenté ces propriétés, ou plutôt on en a fait une application très-utile dans la construction d'un instrument d'astronomie, que l'on appelle *machine parallactique*. Voyez *fig.* 12, *bis*. Il est essentiellement composé d'un axe fixe *AC*, très-solide, destiné à représenter l'axe de rotation du ciel, et d'un cercle *ER*, dont le plan est perpendiculaire à cet axe. Une lunette mobile, munie d'un micromètre, parcourt la circonférence du cercle *ER* en restant toujours perpendiculaire à l'extrémité d'un de ses rayons, tel que *CR* autour duquel elle peut tourner, de manière à prendre toutes les inclinaisons possibles relativement à l'axe. Lorsqu'une fois elle est dirigée vers l'astre, et qu'on a placé celui-ci sous le fil du micromètre, on la fixe avec une vis de pression, et l'angle des rayons visuels avec l'axe de rotation est déterminé. Alors la lunette ne quitte plus le cercle que l'astre décrit, et en la faisant tourner autour du cercle fixe, avec cette inclinaison constante, on suit l'astre dans toute l'étendue de l'arc qu'il parcourt au-dessus de l'horison. Cela prouve évidemment que le mouvement de l'astre est circulaire ; car le diamètre du cercle *ER* étant insensible relativement à la distance des étoiles, si l'on conçoit une ligne droite *CL* menée par le centre *C*, parallélement à l'axe optique de la lunette ; cette droite pourra être considérée comme représentant à chaque instant la direction du rayon visuel ; et puisque son inclinaison sur l'axe reste constamment la même ; il en résulte qu'elle ne peut décrire autour de l'axe qu'une surface

Digitized by Google

conique dont le sommet est en *C*. Pour faire usage de cet instrument, il faut d'abord placer son axe dans le plan du méridien, et ensuite lui donner sur l'horison une inclinaison égale à celle de l'axe de rotation du ciel, c'est-à-dire à la hauteur du pôle dans le lieu où se fait l'observation.

L'emploi de la machine parallactique rend donc sensible le mouvement de révolution de tous les astres autour d'un même axe. Il montre que ce mouvement est exactement circulaire. On aurait pu, sans doute, exposer d'abord les résultats qui s'observent à l'aide de cet instrument, et partir de ces résultats pour expliquer le mouvement diurne du ciel. Mais en suivant cette marche, on substitue une preuve mécanique aux preuves géométriques que nous avons rapportées, et qui sont fondées sur des rapports dont l'usage est continuel en astronomie. D'ailleurs le placement de la machine parallactique exige la connaissance du méridien et de la hauteur du pôle; puisque l'on ne trouve le mouvement circulaire qu'autour de l'axe de rotation, dont la position est déterminée dans ce plan. Et même, en supposant que l'on tombât, comme au hasard, sur la situation convenable, les effets de la réfraction altéreraient toujours la régularité du cercle décrit par l'étoile; de sorte qu'on ne pourrait pas la suivre avec une même inclinaison de la lunette dans toute l'étendue de son cours. Ainsi pour voir que ce mouvement est réellement circulaire, il deviendrait toujours nécessaire d'ôter de ces phénomènes les effets de la réfraction. Enfin, l'instrument n'apprend pas quelle est la loi de cette rotation. Le seul moyen rigoureux de la découvrir est celui des considérations géométriques qui, combinées avec les observations du tems, démontrent avec rigueur la forme

Digitized by Google

circulaire de la trajectoire, et prouvent l'uniformité du mouvement de l'astre qui la décrit. J'ai cru ces réflexions utiles pour montrer en général, quoique d'après un exemple particulier, combien, pour établir rigoureusement les vérités, les preuves mathématiques l'emportent sur les machines les plus parfaites. La machine parallactique quoique fondée sur la circularité du mouvement diurne, n'a cependant pas pour objet spécial de prouver cette propriété; mais sa construction telle que nous venons de la décrire, la rend appropriée à une foule d'observations astronomiques dont nous aurons bientôt occasion de parler.

Digitized by Google

CHAPITRE X.

De la Sphère céleste et de ses Cercles principaux.

112. Les diverses questions que nous avons traitées dans le chapitre précédent se sont trouvées dépendre de la résolution des triangles sphériques. Il en sera de même de toutes celles que nous pourrons nous proposer, lorsqu'elles auront pour objet les angles formés par les rayons visuels menés de notre œil aux différens points du ciel. Si, autour de l'observateur considéré comme centre des mouvemens célestes, on conçoit une sphère d'un rayon quelconque, dont la surface coupera perpendiculairement tous les rayons visuels menés aux différens astres, les points d'intersection de ces rayons étant unis par des arcs de grands cercles, détermineront sur la sphère des triangles sphériques. Les différentes parties de ces triangles étant calculées et liées les unes aux autres par les rapports connus qui constituent la trigonométrie sphérique, donneront les rapports de position qui existent entre les astres observés.

113. Peu importe à quelle distance les rayons visuels sont coupés par cette sphère; les mêmes rapports de position et de grandeur subsistent entre eux. On peut donc sans difficulté, la supposer décrite d'un rayon immense, qui s'étendra au-delà de tous les astres, et les attacher, par la pensée, sur la direction de leurs rayons lumineux,

Digitized by Google

à la surface concave de cette même sphère, au centre de laquelle nous nous trouvons; cette construction forme ce que les astronomes appellent la *sphère céleste.*

Chaque observateur étant placé au centre de sa sphère, il y a autant de ces centres et de ces sphères qu'il y a de points sur la surface terrestre; et les situations apparentes des astres, c'est-à-dire les points de la sphère céleste auxquels on les rapporte doivent être différens pour chaque observateur. Cela se vérifie, en effet, pour la plupart des astres doués de mouvemens propres. Mais, pour les étoiles fixes dont nous devons d'abord nous occuper spécialement, comme tous les rayons visuels qui leur sont menés au même instant de tous les points de la terre peuvent être censés parallèles, il s'ensuit que chaque observateur les projette sur sa sphère, à des points exactement correspondans. Ou, ce qui revient au même, si l'on donne à cette sphère un rayon si grand que le diamètre de la terre, par rapport à ce rayon, puisse être considéré comme insensible, et la terre considérée comme un point, il n'y aura plus qu'une seule sphère céleste pour tous les observateurs, et les rayons visuels menés de leurs yeux à une même étoile infiniment éloignée, devront être considérés comme aboutissant aux mêmes points de sa surface. Mais si ces rayons visuels étant dirigés à un astre plus rapproché, font entre eux un angle sensible, ils aboutiront sur la sphère céleste à des points différens.

114. Au reste, n'oublions pas que cette forme sphérique que nous imaginons ici n'a rien de réel, relativement à l'éloignement absolu des différens astres. Ceux-ci peuvent être et sont en effet placés à des distances très-inégales. La considération de la sphère céleste n'est qu'une conception géométrique propre à fixer les idées et à

Digitized by Google

faciliter le raisonnement, toutes les fois qu'on ne veut comparer que les angles formés dans l'œil de l'observateur par les divers rayons visuels.

115. Présentons maintenant, sous ce point de vue, les constructions géométriques dont nous avons fait usage pour fixer la position des astres dans le ciel.

Tous les plans menés par l'œil de l'observateur passent par le centre de la sphère céleste, et coupent, par conséquent, sa surface suivant de *grands cercles*. Tels sont les plans de l'horison, du méridien, les plans horaires et tous les verticaux. Les angles visuels, observés dans ces plans, ont leur mesure sur les grands cercles qui résultent de leur intersection avec la sphère céleste : on peut donc substituer les arcs aux angles dans la suite des raisonnemens.

On conçoit ainsi tous les cercles de la sphère céleste divisés en degrés, minutes et secondes, et l'on indique la mesure des angles visuels au moyen de ces divisions. Par exemple, si les rayons visuels, menés à deux étoiles situées dans le méridien, font ensemble un angle de 10 degrés, on dira qu'elles se trouvent dans le méridien à 10 degrés de distance l'une de l'autre. Il en est de même de tous les angles visuels. Ces angles ont tous leur sommet dans l'œil de l'observateur, c'est-à-dire, au centre de la sphère céleste ; par conséquent, ils intercepteront toujours, sur la surface de cette sphère, des arcs de grands cercles qui leur serviront de mesure, et par le moyen desquels on pourra toujours les comparer.

116. Il n'en est pas ainsi des cercles que les étoiles décrivent par l'effet du mouvement diurne : ceux-ci ont tous leurs centres situés sur l'axe de rotation du ciel, mais non pas au centre de la sphère céleste : ce ne sont

Digitized by Google

donc pas de grands cercles. Un seul jouit de cette propriété : c'est celui dont le plan, toujours perpendiculaire à l'axe de rotation du ciel, passe en même tems par le centre de la sphère céleste. On le nomme *l'équateur céleste*, et le plan qui le contient s'appelle le *plan de l'équateur*. On lui donne cette dénomination parce qu'il divise la sphère céleste en deux portions symétriques, relativement à l'étendue des cercles que les étoiles décrivent. Ceux-ci ayant un rayon moindre que celui de la sphère céleste, sont tous de *petits cercles*. On les nomme *parallèles célestes*, parce que les plans qui les contiennent, étant aussi perpendiculaires à l'axe de rotation du ciel, sont en effet parallèles au plan de l'équateur.

On peut encore considérer les parallèles célestes comme résultans de l'intersection de la sphère céleste, par la surface conique que forment les rayons visuels menés à une même étoile, dans toute l'étendue de sa révolution. Cela est rendu sensible par la *machine parallactique*.

117. Fixons maintenant, par des données géométriques, la position du plan de l'équateur et celle des parallèles que nous venons d'imaginer.

La position de l'équateur se détermine, par sa *trace*, sur le plan de l'horison, et sa *hauteur*, c'est-à-dire, l'angle qu'il fait avec l'horison.

La *trace de l'équateur, sur l'horison, est une ligne droite perpendiculaire à la méridienne*. C'est celle que nous avons nommée la perpendiculaire. Elle est représentée par OO', *fig.* 24.

118. La *hauteur de l'équateur sur l'horison*, ou l'angle EOH, *est complément de la hauteur du pôle*; car l'angle EOP est droit, et les angles HOE, POH', pris ensemble, valent aussi un angle droit. A Paris, la hauteur de l'équateur, sur l'horison, est $41°.9'.47''$ à l'Observatoire.

Digitized by Google

119. La position des parallèles que les étoiles décrivent se détermine d'après leur distance polaire, laquelle se conclut des distances méridiennes observées, ainsi que nous l'avons déja enseigné.

120. A ce sujet, il importe de remarquer que les degrés, minutes et secondes des parallèles ne sont pas des mesures absolues et immédiatement comparables, comme les degrés des grands cercles. Il faut encore y faire entrer un autre élément, savoir la grandeur du rayon de ce parallèle, ou sa distance polaire. Car un degré d'un parallèle situé près du pôle, n'est pas égal en longueur, à un degré du cercle de l'équateur. Ces degrés indiquent, sur la sphère céleste, des arcs bien différens.

Cependant, il est toujours facile de trouver leurs rapports, soit entre eux, soit avec les degrés d'un autre parallèle; pour cela, il suffit de savoir convertir les arcs de parallèle en arcs de grands cercles, et réciproquement.

Soit $PSMP'$, *fig.* 25, le grand cercle du méridien; c'est-à-dire, celui suivant lequel le plan du méridien coupe la sphère céleste. Soit QME le grand cercle de l'équateur ayant, comme le précédent, son centre au point O, centre des observations. Représentons par SS' un parallèle quelconque dont la distance polaire soit PS. L'équateur et le parallèle sont divisés en un même nombre de degrés; ainsi les longueurs des arcs qui représentent ces degrés sont proportionnels aux contours des deux cercles ou aux rayons de ces cercles, car les circonférences sont entre elles comme leurs rayons. En effectuant cette proportion, on voit que la longueur de chaque degré SS' du parallèle, exprimé en degrés de l'équateur, tels que MM', vaudra $1^\circ.\frac{SC}{MO}$; et réciproquement $\frac{1^\circ.MO}{SC}$ sera

Digitized by Google

la longueur d'un degré de l'équateur exprimé en degré du parallèle ; ce qui donne le moyen de convertir, de la même manière, un nombre quelconque de degrés.

Dans un cercle *PMO*, dont *O* est le centre, *POP'* un diamètre, et *SC* une perpendiculaire au diamètre menée de l'extrémité de l'arc *PS*, le rapport $\frac{SC}{PO}$ ou $\frac{SC}{MO}$ se nomme le sinus de l'arc *PS* ; d'où résulte la règle suivante : pour *réduire un nombre de degrés, minutes et secondes d'un parallèle en degrés, minutes et secondes de l'équateur, il faut multiplier le nombre donné par le sinus de la distance polaire du parallèle.*

Réciproquement, *pour convertir les arcs de l'équateur en arcs de parallèle, il faut les diviser par le sinus de la distance polaire.*

121. On a un exemple de ces réductions, et un exemple pour ainsi dire physique, dans l'inégalité des tems que les différentes étoiles emploient à traverser les fils du micromètre de l'instrument des passages, selon les parallèles où elles sont placées. Celles qui sont près de l'équateur vont plus vîte, celles qui sont près du pôle vont plus lentement ; et généralement la durée de leur passage paraît exactement réciproque au sinus de leur distance polaire.

Digitized by Google

NOMS des ASTRES.	DISTANCE au pôle boréal.	DURÉE du passage entre deux fils observée.	PRODUIT de la durée du passage par le sinus de la distance polaire.
Polaire.....	1° 42′ 20″	581″80	17″32
La Chèvre.....	44 12 36	24 90	17.37
β de la Vierge.....	87 9 52	17.40	17.37
Rigel.....	90 25 50	17.35	17.36
Antarès.....	115 59 50	19.35	17.39
		Résultat moyen....	17.36

Les trois premières colonnes renferment, pour chaque étoile, les résultats de l'observation. En multipliant la durée du passage par le sinus de la distance polaire, on obtient les nombres contenus dans la dernière colonne, et leur égalité montre bien que la proportion dont il s'agit est exacte. Ces nombres représentent la durée du passage d'une étoile qui serait située dans le plan de l'équateur.

Pour se rendre raison de ces résultats, il faut faire attention que les fils verticaux du micromètre *Ff*, *F′f′*, *fig.* 10, interceptent, sur le fil horisontal, une distance *SS′* qui reste constamment la même dans toutes les positions de la lunette. Cette distance soutend par conséquent, sur la sphère céleste, un angle constant, qui ayant son sommet au centre de cette sphère, a pour mesure un certain arc de grand cercle. Mais, comme cet arc est toujours fort petit, lorsqu'on le transporte, par le mouvement de la lunette, sur les parallèles des différens

Digitized by Google

astres, il se confond sensiblement avec un petit arc de ces parallèles; et occupe, sur leur circonférence, un nombre de degrés qui est toujours réciproque au sinus de leur distance polaire. Or, à cause du mouvement commun de la sphère céleste, il passe au méridien, dans un tems donné, un même nombre de degrés de tous les parallèles. L'étoile doit donc employer plus de tems pour traverser le fil horisontal de la lunette, à mesure que celui-ci occupe un plus grand nombre de divisions sur la circonférence du parallèle; et les durées des passages doivent être proportionnelles à l'étendue que le fil du micromètre occupe, c'est-à-dire, réciproque au sinus de la distance polaire.

Ce résultat n'a lieu ainsi que d'une manière approchée, et seulement lorsque les arcs de l'équateur et des parallèles que l'on superpose sont extrêmement petits. En effet, soit E l'angle visuel ou l'arc de l'équateur que l'on veut porter successivement sur divers parallèles. Soit π l'arc de parallèle qui y correspond. Dans la réalité, ce ne sont pas les arcs E et π qui coïncident, ce sont leurs cordes; et l'on ne peut substituer les unes aux autres que lorsque les arcs sont fort petits, comme dans les exemples de passages que nous avons rapportés (*).

(*) Soit R le rayon de l'équateur de la sphère céleste; r, celui du parallèle. La corde de l'arc E est égale à $2R \cdot \sin \frac{1}{2} E$; la corde de l'arc π est $2r \sin \frac{1}{2} \pi$; puisque, dans la superposition des arcs, ces cordes doivent être égales, on a

$$R \cdot \sin \tfrac{1}{2} E = r \cdot \sin \tfrac{1}{2} \pi.$$

Soit δ la distance polaire du parallèle, on aura

$$r = R \sin \delta;$$

Digitized by Google

Les astres doués d'un mouvement propre, comme le soleil, la lune et les planètes, offrent des variations analogues dans le tems que leur disque emploie à traverser le méridien, selon les différens parallèles où ils se trouvent. Mais, pour ces astres, outre la cause que nous venons de remarquer et qui est la principale, il en existe encore une autre; c'est que l'étendue apparente de leur disque change à diverses époques, par suite des variations de leur distance, comme on le verra plus loin.

---

en substituant cette valeur, et divisant tout par R, il vient

$$\sin \tfrac{1}{2} E = \sin \delta \,.\, \sin \tfrac{1}{2} \pi \;.\;.\;.\;.\; (1)$$

c'est la formule exacte, générale et rigoureuse. Mais lorsque les arcs E et π sont fort petits, comme dans les exemples dont nous avons fait usage, le rapport $\frac{\sin \frac{1}{2} E}{\sin \frac{1}{2} \pi}$ est, à fort peu près, le même que celui de $\frac{E}{\pi}$. Ainsi, en substituant ce second rapport au premier dans l'équation précédente, elle devient

$$E = \pi \,.\, \sin \delta \;.\;.\;.\;.\; (2)$$

c'est celle que nous avons employée, mais elle n'est applicable qu'à de très-petits arcs.

Il est bon de remarquer que le rayon R de la sphère céleste, a disparu de l'équation (1); de sorte que les relations des arcs E, δ et π, sont indépendantes de la valeur de ce rayon. Cela était facile à prévoir, puisque toutes les sphères concentriques, que l'on peut ainsi décrire autour de l'observateur, ne changent point les valeurs absolues des angles. Elles ne changent que celles de leurs sinus. Mais comme ceux-ci croissent tous, en même tems, dans le même rapport, proportionnellement au rayon de la sphère, les relations de grandeur qui subsistent entre eux n'en sont nullement altérées. Ils sont seulement rapportés à une unité différente. Ainsi,

Digitized by Google

122. Les distances au zénith et les azimuths nous ont offert, pour chaque lieu de la terre, un systême de coordonnées angulaires auxquelles on peut rapporter la position de tous les astres ; mais ce systême a l'inconvénient d'être variable d'un pays à l'autre. Car, à cause de la rondeur de la terre, les plans de l'horison et du méridien auxquels se rapportent les hauteurs et les azimuths, prennent, dans l'espace, toutes les directions possibles, et par conséquent les positions des astres, ainsi exprimées, n'offrent rien de comparable. L'équateur et les plans horaires nous offrent un systême de coordonnées analogues, mais bien préférable, puisqu'étant pris immédiatement dans le ciel, il fournit, à tous les astronomes situés sur la surface terrestre, un moyen uniforme et comparable d'exprimer les résultats de leurs observations.

123. Pour déterminer ainsi la situation d'un astre quelconque sur la sphère céleste, il suffit de connaître le plan horaire, ou le cercle horaire sur lequel il se trouve, et sa position sur ce cercle ou dans ce plan. Tout se réduit donc à déterminer ces deux élémens.

La position de l'astre sur son cercle horaire est déter-

---

dans les équations qui expriment ces rapports, la valeur absolue du rayon de la sphère disparaîtra toujours. Quoique cette remarque soit très-simple, il m'a paru utile de la présenter, pour faire encore mieux comprendre, par cet exemple, que ce qu'on appelle la sphère céleste n'est qu'une conception géométrique propre à fixer le raisonnement, et qu'on ne doit y attacher aucune idée de réalité physique ni de grandeur absolue. Toutes les sphères concentriques à l'observateur peuvent être, pour lui, la sphère céleste ; et, s'il en choisit une d'un rayon immense, c'est parce que les astres étant si loin de lui qu'il ne peut, à la vue seule, juger de leur éloignement relatif, ses yeux les supposent également et infiniment éloignés.

Digitized by Google

minée lorsque l'on connaît sa distance au pôle, ou sa *distance à l'équateur* qui en est le complément et que l'on nomme la *déclinaison;* c'est pourquoi on appelle souvent les cercles horaires *cercles de déclinaison.*

La position du plan horaire sur la sphère céleste se détermine d'après l'angle qu'il fait avec un plan horaire connu. Pour cela, on en choisit un à volonté, que l'on suppose fixe. Ce sera, par exemple, celui qui passe par une étoile que l'on aura désignée. Si l'on imagine plusieurs autres plans horaires, menés par différens points du ciel, ils feront des angles dièdres plus ou moins grands avec le premier. Chacun d'eux sera donc distingué par l'angle qui lui est propre et qui a pour mesure l'arc de l'équateur compris entre lui et le premier plan horaire. Cet arc se nomme l'*ascension droite.* On le détermine en observant le tems qui s'écoule entre le passage de l'astre au méridien, et celui du plan horaire que l'on a choisi pour point de départ. Ce tems, converti en degrés ou en grades, est l'ascension droite de l'astre; elle se compte toujours d'occident en orient, et depuis o jusqu'à la circonférence entière. Quant à la déclinaison, elle se compte depuis o jusqu'à un angle droit; on la dit *boréale* ou *australe*, suivant que l'astre auquel elle appartient est situé au nord ou au sud de l'équateur.

124. Lorsque ces deux coordonnées, la *déclinaison* et l'*ascension droite*, sont connues, on peut trouver, par la trigonométrie sphérique, tous les rapports de position et de distance qui existent sur la sphère céleste entre les points auxquels elles se rapportent.

Par exemple, si l'on veut trouver l'*arc de distance* de deux étoiles, c'est-à-dire, l'arc de la sphère céleste qui les unit, on tirera de leurs déclinaisons leurs distances à

Digitized by Google

un même pôle. On prendra ensuite la différence de leurs ascensions droites ; ce sera l'angle compris entre les plans horaires où elles se trouvent. Alors les deux distances polaires et l'arc de distance formeront, sur la sphère céleste, un triangle sphérique où l'on connaîtra deux côtés et l'angle compris. On pourra donc calculer le troisième côté ou l'arc de distance des deux étoiles (*). On pourrait de la même manière calculer l'arc de distance, d'après les distances au zénith et les azimuths. Le raisonnement est le même, le système seul des coordonnées est changé.

125. Le point de l'équateur d'où les astronomes comptent les ascensions droites dépend du mouvement du

---

(*) Soit P la différence des ascensions droites ou l'angle au pôle; soient p et p' les distances polaires des deux astres, et Δ leur distance angulaire mesurée sur un grand cercle de la sphère céleste : dans le triangle sphérique formé par les trois côtés p, p' et Δ, on connaît p et p' et l'angle P ; on aura donc, suivant les formules de la trigonométrie sphérique,

$$\cos \Delta = \sin p \,.\, \sin p' \cos P + \cos p \cos p' ;$$

cette formule, comme celle de la page 101, peut être rendue plus commode, pour le calcul logarithmique, en prenant un angle auxiliaire φ, tel qu'on ait

$$\operatorname{tang} \varphi = \cos P \,.\, \operatorname{tang} p' ,$$

ce qui donne, en éliminant $\cos P$,

$$\cos \Delta = \frac{\cos p'}{\cos \varphi} \,.\, \{ p - \varphi \}$$

Par la première équation, on cherchera d'abord la valeur de φ, qui est facile à évaluer par logarithmes ; connaissant φ, on tirera Δ de la seconde équation, par un calcul semblable.

Digitized by Google

soleil, ou plutôt de la position de cet astre à une époque déterminée, car c'est au soleil, comme au régulateur naturel des jours, des années et des siècles, que les astronomes rapportent toutes leurs observations. Mais ce choix purement arbitraire ne change point les positions respectives des astres dans le ciel; il n'influe ni sur leurs déclinaisons, ni sur leurs différences d'ascension droite; il détermine seulement sur leur ascension droite absolue. Il ne doit donc apporter aucun changement aux lois des mouvemens des astres qui se déduisent des rapports de leurs positions à différentes époques. Ainsi, jusqu'à ce que nous ayons acquis les données d'après lesquelles on a fixé cette origine, nous pouvons d'abord supposer les ascensions droites de toutes les étoiles rapportées à une d'entre elles, comme à une origine fixe et déterminée.

126. En observant les passages des étoiles à la lunette méridienne, et mesurant leur distance méridienne au zénith, avec le mural ou par des moyens équivalens, on détermine, comme nous venons de le dire, leurs ascensions droites et leurs déclinaisons. On peut donc dresser des registres qui font connaître la position de toutes les étoiles observées, et l'ordre dans lequel elles se succèdent dans leur passage. C'est ce que l'on nomme des *catalogues d'étoiles*. On en publie un chaque année, pour les plus apparentes, dans la *Connaissance des tems*. Avec un pareil catalogue, rien n'est plus facile que d'apprendre à distinguer et à reconnaître toutes les constellations visibles dans le lieu où l'on se trouve. Il faut pour cela se mettre à la lunette méridienne, ou même si l'on manque de cet instrument, il suffit de se placer auprès d'une muraille dirigée à-peu-près dans le plan du méridien, et avoir avec soi une horloge qui suive le tems sydéral ou dont la marche soit déterminée. Dès que l'on

Digitized by Google

connaîtra une seule étoile, et qu'on l'aura vue passer au méridien, on les reconnaîtra toutes d'après le catalogue qui donne leur différence d'ascension droite, et par conséquent les intervalles de tems après lesquels elles se suivent. Cette étude deviendra encore plus agréable et plus facile, si l'on s'aide en même tems d'une *carte céleste* sur laquelle soient figurées les différentes constellations, avec les principales étoiles qui les composent; ce qui permet de les déterminer et de les déduire en quelque sorte les unes des autres par des alignemens. C'est là le principal avantage de ces cartes; car il ne faut pas s'arrêter aux figures d'hommes et d'animaux, par lesquelles on désigne les différentes constellations. Ces figures n'ont aucun rapport réel avec l'arrangement des étoiles dans le ciel. Elles ont été déterminées par le caprice des hommes, quelquefois par flatterie; mais cependant elles peuvent jusqu'à un certain point servir pour aider la mémoire, en attachant aux grouppes d'étoiles des noms connus. Avec ces secours, on connaîtra parfaitement, en quelques nuits, toutes les étoiles qui seront visibles à l'époque où l'on aura observé; et en répétant la même épreuve à diverses époques, lorsque l'aspect du ciel sera changé par l'effet du mouvement propre du soleil, on parviendra aisément à distinguer et à reconnaître toutes les constellations.

127. Les ascensions droites de toutes les étoiles étant déterminées relativement à une d'entre elles, comme nous venons de le dire, si l'on veut les rapporter au point de l'équateur que les astronomes sont convenus de choisir pour origine, il suffira de connaître la différence d'ascension droite entre ce point et une étoile quelconque; cette différence ajoutée à l'*ascension droite relative* de toutes les étoiles, donnera leur ascension droite absolue,

Digitized by Google

telle qu'on la trouve dans la Connaissance des tems. Par exemple, il suffit de savoir que le premier janvier 1810 ce point de l'équateur passait au méridien $1^h.56'.29''53$ avant l'étoile α du bélier, abstraction faite de l'aberration, de la précession et de la nutation; ou en d'autres termes, que l'ascension droite *vraie* de α du bélier, exprimée en tems sydéral et pour cet instant, était $1^h.56'.29''.53$ ou $29°.7'.22''$ en arc. Je dis pour cet instant, parce que la précession, la nutation et l'aberration rendent l'ascension droite variable.

128. Le même point qui sert d'origine pour les ascensions droites, sert aussi d'origine pour le tems sydéral, c'est-à-dire, que l'on compte 0°, 0′, 0″, sydérales quand il passe au méridien. On le désigne ordinairement par le signe ♈ caractère de la constellation appelée le *bélier* ou *aries*. Nous en verrons la raison plus tard.

129. D'après ces définitions, rien de plus aisé que de trouver, à chaque instant, l'heure qu'il est en tems sydéral, dans un lieu où l'on connaît la hauteur du pôle. Il suffit d'observer la distance zénithale d'une étoile connue, et de calculer son angle horaire, que je suppose compté du méridien supérieur et dans le sens du mouvement diurne de 0 à 360°. En ajoutant cet angle à l'ascension droite de l'étoile, et rejetant les circonférences entières s'il y en a, le reste converti en tems exprimera la distance du méridien au point du ciel que l'on a pris pour origine, c'est-à-dire, l'*heure sydérale* (*).

(*) Soit, *fig.* 26, M ♈ M', le cercle de l'équateur; MM' la projection du plan du méridien sur le plan de ce grand cercle; PS la projection du méridien de l'étoile; ♈ S sera l'ascension droite, que nous nommerons A; MS sera l'arc de l'équateur correspondant à l'angle horaire observé, que nous nommerons P; ajoutant ces arcs,

Digitized by Google

On peut aussi trouver l'heure par l'observation du soleil ou d'une planète ; mais il faut pour cela que les mouvemens propres de ces astres soient exactement connus, afin de pouvoir réduire les distances zenithales aux mêmes termes qui si l'on eût observé une étoile. Nous sommes donc forcés de renvoyer cette recherche plus loin. Pour le moment, la connaissance du tems sydéral nous suffira, et lorsque nous aurons déterminé les lois des mouvemens propres à l'aide de cette connaissance, nous donnerons, quelques exemples numériques de cette application, la plus importante de l'astronomie.

130. Rappelons encore que les résultats précédens n'ont lieu avec rigueur, qu'en supposant aux étoiles un éloignement presqu'infini, ou du moins tel, que vues des différens points de la terre, elles ne présentent aucune différence d'aspect sensible, en sorte que les rayons visuels menés de ces points à une même étoile puissent être censés parallèles entre eux. Cette condition n'a plus lieu pour le soleil, la lune, les planètes et les comètes, qui par là semblent beaucoup plus rapprochées de nous que les fixes. Alors, pour rendre les observations de ces astres comparables entre elles, quoique faites dans les différens pays, il faut y faire une petite correction dont nous

---

on aura $P + A = M\Upsilon$. Cette somme, convertie en tems sydéral, donnera donc la distance de Υ au méridien, ou l'heure sydérale.

Ici, il n'y a pas de circonférence entière à rejeter : il y en aurait si l'étoile était de l'autre côté du méridien, par exemple, en S'' ; on aurait alors $MSM'S' = P'$, $\Upsilon MS' = A'$; par conséquent, $P' + A' = 360° - MS' + \Upsilon MS'$; ainsi, en retranchant 360°, le reste serait $\Upsilon MS' - MS'$; ou $\Upsilon M'$, comme tout-à-l'heure. La formule s'appliquerait de même dans tous les quadrans, ce qui tient à ce que les arcs sont toujours comptés dans le même sens de 0 jusqu'à 360°.

Digitized by Google

parlerons plus loin, quand nous aurons déterminé exactement la forme et la grandeur de la terre.

Les notions que nous venons d'acquérir sur les différens cercles de la sphère céleste, nous permettent d'ajouter quelque chose sur l'usage de la machine parallactique. Elle sert spécialement pour mesurer de petites différences d'ascension droite et de déclinaison. Pour cela on dispose les fils rectangulaires du micromètre, de manière que les uns représentent des cercles horaires, et les autres des arcs de parallèles. Alors, si deux étoiles passent en même tems dans le champ de la lunette, la différence des époques de leur passage aux mêmes fils horaires donne leur différence d'ascension droite. Pour avoir la différence de déclinaison, on place une des étoiles sur le fil fixe, qui est perpendiculaire aux fils horaires. Elle le suit par l'effet de son mouvement *diurne*. En même tems on amène sur l'autre étoile le fil mobile qui est parallèle au précédent. L'écart de ces deux fils, indiqué par l'index du micromètre, mesure la différence de déclinaison. On emploie le même procédé pour rapporter aux étoiles les comètes dont l'apparition est toujours de peu de durée, et qu'on ne peut presque jamais observer à la lunette méridienne ou au mural, à cause de la grande faiblesse de leur lumière, sur-tout quand elles passent au méridien pendant le jour. Au moyen de la machine parallactique, on peut déterminer les diamètres apparens des astres avec une très-grande exactitude, parce que la lunette suivant la marche de l'astre, permet de multiplier les observations. Pour les diamètres horisontaux, le procédé est le même qu'avec la lunette méridienne. Mais, d'après ce qu'on a vu, § 121, la différence des passages, des deux bords du disque, aux mêmes fils horaires, ne donne pas immédiatement le diamètre apparent de l'astre.

Digitized by Google

Il faut, pour réduire ce diamètre en parties d'un grand cercle de la sphère céleste, multiplier l'intervalle des passages réduit en arc, par le sinus de la distance polaire du parallèle où on les a observés. On prend cet élément sur un cercle gradué qui fait partie de l'instrument, et sur lequel la lunette fait mouvoir un index. On détermine les diamètres verticaux de la même manière que les différences de déclinaison; mais ils n'ont besoin d'aucune réduction.

Quand on se sert de la machine parallactique, on a souvent besoin de résoudre la question suivante. Etant donnés deux plans horaires qui comprennent sur l'équateur un arc fort petit, trouver l'arc qu'ils interceptent sur un parallèle assigné. Soient *fig.* 25, *PM*, *PM'* les deux plans donnés; *MM'* l'arc de l'équateur qu'ils comprennent; *SS'* l'arc qu'ils interceptent sur le parallèle désigné. Les arcs *SS'*, *MM'* contiendront un même nombre de degrés. Ainsi leurs longueurs absolues seront proportionnelles aux rayons des cercles dont ils font partie; c'est-à-dire qu'elles seront entre elles comme *SC* est à *MO*, ou comme le sinus de la distance polaire est à l'unité. Par conséquent, l'arc *SS'* intercepté sur le parallèle, sera égal à l'arc *MM'* multiplié par le sinus de la distance polaire (*). Cette proposition s'applique dans une infinité de circonstances, particulièrement dans le calcul des éclipses.

(*) Soit E l'arc que les plans horaires interceptent sur l'équateur; π l'arc qu'ils interceptent sur le parallèle dont la distance polaire est δ, on aura

$$\pi = E \sin \delta.$$

Cette formule servirait en général pour tout autre grand cercle que l'équateur. Réciproquement on en déduirait E, si l'on connaissait π.

Digitized by Google

CHAPITRE XI.

Des Pôles et de l'Équateur de la Terre. Définition des Parallèles terrestres. Aspects divers de la Sphère céleste sur les horisons des différens pays.

131. Les principaux cercles de la sphère céleste étant définis, comme nous venons de le dire, et leurs positions respectives étant aussi déterminées, l'aspect sous lequel ils se présentent aux observateurs dépend de l'inclinaison des horisons des différens pays, et par conséquent de leur direction dans l'espace, laquelle dépend à son tour de la courbure de la surface terrestre. Sous ce rapport, la situation variable de la sphère céleste est importante à considérer.

Cette application de nos résultats est générale, quelle que soit la figure de la terre ; mais elle se simplifie tellement, en la supposant sphérique, que je crois devoir commencer par l'expliquer dans cette supposition.

D'ailleurs, puisque nous avons reconnu que la forme de la terre est arrondie de toutes parts, nous pouvons toujours regarder sa sphéricité comme une première approximation. Cette approximation est d'autant plus légitime, qu'en observant l'horison de la mer du haut d'une montagne, ou de tout autre lieu élevé, on trouve toujours sa dépression égale de tous les côtés, dans quelque pays que l'on observe ; ce qui est le caractère distinctif d'une courbure sphérique, puisqu'il n'y a qu'une sphère qui

Digitized by Google

puisse ainsi être touchée dans tous les sens par des surfaces coniques droites, à bases circulaires, comme sont celles que les rayons visuels, menés aux divers points de l'horison, décrivent autour de la verticale. L'horison de la mer est ici particulièrement favorable, à cause de l'uniformité de sa surface, qui n'est interrompue par aucune inégalité, au lieu qu'on n'a pas le même avantage du côté des terres. Mais, dans ce cas même, l'égalité de la dépression dans tous les sens se fait encore sentir, sur-tout lorsqu'on s'élève à de grandes hauteurs. Car alors, les montagnes éloignées qui bordent l'horison n'y causent que de très-petites ondulations qui n'empêchent pas de reconnaître la courbure sphérique. Et quoique cette observation en elle-même ne puisse pas être considérée comme étant de la dernière rigueur, à cause du peu d'étendue que le rayon visuel embrasse, cependant elle nous suffit pour légitimer une première approximation, ou, pour mieux dire, un premier énoncé; puisque, après avoir établi ce qui aurait lieu si la terre était sphérique, nous déterminerons, en général, les résultats qui doivent avoir lieu quelle que soit sa courbure.

132. Si la terre était sphérique, on pourrait regarder son centre comme étant celui de la sphère céleste; car, d'après ce que l'on a vu précédemment de l'immense éloignement des étoiles, le centre de cette sphère peut être supposé placé dans un point quelconque de la terre indifféremment. Alors, un observateur placé à ce centre même, verrait tous les points de la terre projetés sur la sphère céleste, chacun suivant sa verticale; et les divisions géométriques que nous venons de tracer sur cette sphère, s'appliqueraient aussi à la surface terrestre. Commençons donc par développer ces rapports dans l'hypothèse de la sphéricité.

Digitized by Google

Dans ce cas, les plans de l'équateur et du méridien étant menés par le centre de la sphère céleste, qui est ici celui de la terre, coupent la surface terrestre, suivant de grands cercles auxquels on a donné des noms analogues à ceux qui leur correspondent dans le ciel. L'intersection de la surface de la terre, par le plan de l'équateur, se nomme l'*équateur terrestre*. L'axe de rotation du ciel, considéré sous ce rapport, prend le nom d'*axe de la terre*; il passe par son centre, et les deux points opposés où il perce sa surface se nomment les *pôles de la terre*. Enfin l'intersection de cette même surface, par les plans horaires, donne les *méridiens terrestres*, ou simplement les *méridiens;* lesquels se coupent tous aux pôles, puisqu'ils contiennent tous l'axe de rotation.

133. La terre est si petite, que deux plans qui la toucheraient à ses deux pôles, et qui seraient parallèles à l'équateur, passeraient par les mêmes étoiles, et iraient rencontrer la sphère céleste dans l'équateur même; ou du moins l'arc qu'ils intercepteraient sur cette sphère, étant vu de la terre, répondrait à un angle si petit qu'il serait inappréciable. Les plans des parallèles célestes qui interceptent de grands arcs sur la sphère céleste de part et d'autre de l'équateur, ne coupent donc point la surface de la terre, ils passent infiniment au dehors. Mais si l'on imagine des cônes qui aient leur sommet au centre de la terre, et pour base les différens parallèles célestes, ces cônes couperont la surface de la terre, supposée sphérique, suivant des cercles dont le plan sera parallèle à celui de l'équateur, et que l'on nomme pour cette raison des *parallèles terrestres*.

134. Si l'on veut maintenant établir des définitions générales qui soient applicables, quelle que soit la figure de la terre, il faudra regarder l'équateur de la terre comme

Digitized by Google

formé par tous les points de la surface terrestre, dont les verticales sont parallèles au plan de l'équateur céleste, ou ce qui revient au même, sont perpendiculaires à l'axe de rotation du ciel. Il est en effet visible, qu'à cause de la petitesse de la terre, ces verticales indéfiniment prolongées pourront être considérées comme aboutissant sur la sphère céleste aux divers points d'un même grand cercle qui sera celui de l'équateur céleste. Car si, par le centre de la terre, on mène des lignes droites situées dans le plan de cet équateur, et respectivement parallèles aux verticales que nous venons de considérer, l'intervalle constant qui séparera chacune de ces parallèles de la verticale correspondante, étant transporté sur la sphère céleste et vu de la terre, paraîtra tout-à-fait nul. Mais quoique les sommets de ces verticales semblent compris dans un même plan, à cause de la distance presque infinie, les points qui leur servent d'origine sur la surface terrestre pourront bien n'être pas susceptibles d'être compris dans un même plan ; et alors l'équateur terrestre sera, ce que l'on nomme en géométrie, une courbe à double courbure.

Lorsque l'on suppose la terre sphérique, cette définition rentre dans la précédente ; car alors l'équateur terrestre est un grand cercle dont le rayon est perpendiculaire à l'axe de rotation. Or, sur tous les points de ce cercle, le rayon lui-même est la verticale. Dans ce cas, l'équateur terrestre est une courbe plane et circulaire.

Ce dernier résultat peut encore avoir lieu sans que la terre soit sphérique ; il suffit que sa surface soit de révolution autour de l'axe qui passe par les pôles, en sorte qu'on puisse la considérer comme engendrée par la rotation d'une courbe plane autour de cet axe. Si l'on mène

Digitized by Google

à cette ligne génératrice une tangente parallèle à l'axe de rotation, la tangente, en tournant avec elle, décrira une surface cylindrique à base circulaire, et le plan mené par le point de tangence, perpendiculairement à l'axe de rotation, sera normal au cylindre et à la surface engendrée. Dans ce cas, l'équateur terrestre sera donc encore une ligne plane et circulaire.

135. La définition générale des méridiens terrestres n'offre pas plus de difficulté. Ce sont les points de la terre dont les verticales aboutissent à un même méridien céleste. Le méridien de chaque lieu est un plan mené par l'axe de rotation du ciel parallèlement à la verticale du lieu. Si la verticale ne coupe pas l'axe de rotation, elle ne sera pas comprise dans ce plan. Mais l'intervalle constant qui l'en sépare, étant transporté sur la sphère céleste et vu de la terre, paraîtra nul. Tous les autres points de la terre qui sont sous le même méridien céleste, ont leur verticale parallèle à ce plan-là. Mais quoique les sommets de ces verticales semblent se confondre dans un même plan, à cause de la petitesse de la terre, leurs pieds peuvent former, sur la surface terrestre, une courbe à double courbure. Dans le cas de la terre sphérique, les méridiens sont des grands cercles. Si la terre est une surface de révolution, ce sont des lignes planes dont la figure est la même que celle de la courbe génératrice. Alors tous les méridiens se ressemblent exactement. En général, quelle que soit la figure de la terre, tous les points d'un méridien terrestre, assujéti à la définition précédente, voient en même tems et au même instant physique, le passage des astres au méridien céleste.

D'après les définitions générales que nous venons de donner, on voit que les pôles de la terre seront les points de sa surface où la verticale est parallèle à l'axe de rotation;

Digitized by Google

de sorte que ces points pourront bien ne pas se trouver opposés sur une même ligne droite parallèle à cet axe, comme dans le cas de la terre sphérique.

136. Enfin, en suivant toujours les mêmes analogies, les *parallèles terrestres* seront formés, en général, par les points dont les verticales iront rencontrer la sphère céleste sur un même parallèle. De cette manière, tous les points d'un même parallèle terrestre verront les mêmes étoiles à leur zénith. Mais la suite de ces points sur la terre pourra bien ne pas former un cercle, ni même une courbe plane.

137. On peut donc classer les divers parallèles et les distinguer les uns des autres, d'après la déclinaison du parallèle céleste auquel ils répondent; ou, ce qui revient au même, d'après l'angle que leur verticale fait avec le plan de l'équateur céleste. Cet angle se nomme la *latitude parallèle*.

Dans la *fig.* 27, ZO est la verticale menée au point O sur le parallèle OO'. La ligne OE étant supposée parallèle à l'équateur, l'angle ZOE, ou son égal ZNE, est la latitude du point O. Si la terre est sphérique, la verticale ZO passe par son centre, car toutes les verticales concourent en ce point. Mais ce concours est particulier à la forme sphérique. Quelle que soit la figure de la terre, la latitude est nulle à l'équateur, parce que la verticale se trouve dans le plan de l'équateur céleste, si la terre est sphérique, ou parallèle au plan de cet équateur, dans le cas général. Au pôle, la latitude est égale à 90°, parce qu'alors la verticale CP est parallèle à l'axe de rotation, et par conséquent perpendiculaire à l'équateur. La latitude varie entre ces limites depuis 0° jusqu'à 90°.

138. Pour connaître la latitude d'un lieu, il suffit de mesurer la hauteur du pôle sur l'horison; car soit P le

Digitized by Google

pôle, *OH* l'horison, perpendiculaire à la verticale ; enfin *OE* une droite parallèle à l'équateur céleste et menée dans le plan du méridien *POZ*. Les angles *EOP*, *ZOH* sont égaux, et chacun d'eux vaut un angle droit. Retranchant la partie commune *ZOP*, il reste *EOZ* égal à *POH*; c'est-à-dire, qu'en *général*, *la latitude d'un lieu est égale à la hauteur du pôle sur l'horison.*

La latitude de l'Observatoire de Paris est donc égale à 48° 50′ 13″, de la division sexagésimale, d'après les observations de Méchain que nous avons rapportées. Celles de M. Delambre rapportées au même point, comme on le dira par la suite, donnent le même résultat.

La latitude est *boréale* pour les pays situés au nord de l'équateur ; elle est *australe* pour ceux qui sont au midi.

139. Le pôle boréal de la terre est situé dans la mer glaciale, entre la Russie septentrionale et le Groënland. Le pôle austral, qui lui est opposé, est placé au-delà de la Nouvelle-Hollande. Ils sont l'un et l'autre environnés de glaces qui n'ont pas permis, jusqu'à présent, aux navigateurs d'en approcher.

On connaît beaucoup mieux la trace de l'équateur terrestre. Il passe à l'île de Saint-Thomas dans la mer d'Ethiopie, traverse l'Ethiopie elle-même, qui est une partie de l'Afrique ; passe à Sumatra, à Bornéo, dans la Nouvelle-Guinée ; de là se prolonge à travers la mer du Sud, jusqu'au Pérou, et étant rentré de nouveau dans l'Océan atlantique, il vient terminer, aux rivages de l'Afrique, le contour entier de la terre.

140. L'axe de la terre, qui est aussi celui du mouvement diurne, étant diversement incliné sur les horisons des différens pays, il en résulte, dans la marche générale des étoiles, des différences d'aspect remarquables,

Digitized by Google

qui, d'après ce qui précède, peuvent se prévoir et se décrire avec une extrême facilité.

A l'équateur, par exemple, on se trouve placé verticalement sous la direction du mouvement diurne. Un observateur, tourné vers l'orient, ayant le sud à sa droite et le nord à sa gauche, voit les étoiles situées vis-à-vis de lui s'élever verticalement dans le ciel. Elles passent à son zénith et se couchent directement derrière lui. L'arc qu'elles décrivent se trouve tout entier dans un même plan perpendiculaire à l'horison, ce plan est celui de l'équateur.

Les étoiles situées à droite et à gauche, suivent une marche parallèle aux précédentes. Elles décrivent donc aussi des cercles de la sphère céleste. Mais ce sont des petits cercles, parce que les plans qui les contiennent ne passent pas par le centre de la sphère. La grandeur de ces cercles diminue à mesure qu'ils s'écartent de l'équateur. Les étoiles qui s'y trouvent décrivent donc des cercles plus petits et moins élevés sur l'horison. Enfin, vers le sud et vers le nord, on découvre des étoiles qui décrivent des arcs si petits, que leur mouvement est à peine sensible; de sorte que les points du ciel où elles se trouvent paraissent immobiles dans le mouvement général. Ce sont les pôles célestes.

141. Voilà les apparences que présente le mouvement du ciel pour un observateur situé perpendiculairement sous sa direction. Mais en revenant dans notre pays, les apparences ne sont plus les mêmes; et cela doit être, car en changeant de lieu sur la terre, la direction de l'horison change, et l'on a successivement au zénith différens points du ciel. Sous l'équateur, l'observateur voit les deux pôles. Il cessera de les voir tous deux, s'il avance vers le nord ou vers le sud. S'il marche

Digitized by Google

vers le nord, son zénith se rapproche du pôle boréal, et s'éloigne du pôle austral. Celui-ci s'enfonce donc sous l'horison. Il est caché par la convexité de la terre. En marchant toujours vers le nord, les étoiles qui entourent le pôle austral s'abaissent de plus en plus, et deviennent invisibles. L'autre pôle, au contraire, s'élève sur l'horison de la même quantité, et les étoiles qui l'entourent se dégagent de plus en plus. Enfin les cercles que décrivent quelques-unes d'entre elles, s'élèvent entièrement au-dessus de l'horison. Alors ces étoiles ne se couchent plus, et sans la trop grande clarté du soleil, elles resteraient constamment visibles. On observe les phénomènes contraires, en s'avançant vers le sud.

142. Ces différences d'aspect ont fait imaginer aux géographes des dénominations pour désigner les divers pays, d'après la position de la sphère céleste relativement à leur horison. Ils disent qu'un pays a *la sphère droite*, *oblique* ou *parallèle*, selon que l'équateur céleste y est perpendiculaire, oblique ou parallèle au plan de l'horison. Le premier cas a lieu sur l'équateur terrestre, le dernier au pôle; le troisième par tout le reste de la terre.

143. La hauteur du pôle reste toujours la même au-dessus de l'horison de chaque lieu. L'axe et l'équateur de la terre répondent donc toujours aux mêmes points de sa surface. Mais ils répondent successivement à divers points de la sphère des fixes. L'étoile qui est placée à l'extrémité de la petite ourse, et que nous nommons l'étoile polaire, parce qu'elle est aujourd'hui voisine du pôle, en était fort éloignée du tems d'Hipparque, c'est-à-dire, il y a environ deux mille années. Elle s'en approche encore peu-à-peu de siècle en siècle, après quoi elle s'en éloignera. Par suite de ce changement, les étoiles situées dans l'équateur céleste se déplacent peu-à-

Digitized by Google

peu toutes ensemble, et d'autres les remplacent dans ce plan. Cependant la hauteur du pôle sur l'horison reste la même. Ce mouvement progressif est un de ceux que j'ai déja indiqués comme altérant les positions fixes de tous les astres. On l'appelle la *précession*, nous en déterminerons plus loin les lois.

Digitized by Google

CHAPITRE XII.

Détermination exacte de la figure de la Terre. Mesure exacte de sa grandeur.

144. DANS les chapitres précédens, nous venons de découvrir et de prouver la convexité de la terre; cherchons maintenant comment on peut déterminer exactement la forme de sa courbure.

Cette recherche paraît au premier coup-d'œil très-difficile et en quelque sorte impraticable, lorsque l'on considère les irrégularités de la surface terrestre, coupée par tant de fleuves, de ruisseaux, de montagnes et de vallées. Mais ces inégalités, qui nous paraissent énormes, sont en effet extrêmement petites et comme nulles par rapport aux dimensions totales de la terre. On verra plus bas, par le calcul, la preuve mathématique de cette vérité. Je me bornerai ici à présenter les considérations physiques qui la rendent sensible.

Remarquons d'abord que la figure de la terre habitable diffère peu de celle des eaux de la mer, et n'en est en quelque sorte qu'une continuation. En effet, nous avons déja reconnu que la surface des continens est convexe. Cela se voit par la manière progressive dont se répand la lumière du soleil. On s'en apperçoit également par les abaissemens et les élévations apparentes des étoiles lorsque l'on marche du nord au sud. Or les continens sont entourés de tous côtés par la mer, qui s'y insinue par

Digitized by Google

un grand nombre d'ouvertures. C'est ainsi, par exemple, que l'Amérique est séparée en deux parties, qui ne tiennent l'une à l'autre que par une langue de terre fort étroite. De même l'ancien continent est séparé et comme divisé en un grand nombre de parties par plusieurs mers, telles que la Méditerranée, la mer Rouge, le Pont-Euxin, la mer Baltique, qui ne sont que des ramifications de l'océan auquel elles communiquent. Aucun point de l'intérieur des continens n'est donc très-éloigné de la mer. D'ailleurs on n'observe pas que leurs bords soient nulle part fort élevés au-dessus du niveau des eaux qui les baignent. Il est donc de toute nécessité que leur surface suive à-peu-près la convexité de l'océan.

Cela devient encore plus évident, si l'on considère le cours des fleuves dont les continens sont entrecoupés. Plusieurs d'entre eux, tels que le Rhin, le Danube, le Volga, le Nil, l'Amazone, parcourent des étendues de pays très-considérables. L'Amazone seule parcourt plus de 600 myriamètres (1200 lieues), et elle reçoit plusieurs rivières qui ont 3 ou 400 myriamètres de longueur (6 ou 700 lieues). Tous ces grands fleuves se rendent à la mer : aucun d'eux n'a des bords très-élevés. Ils nous indiquent donc, par la lenteur ou la rapidité de leur cours, la *pente* des pays qu'ils traversent, c'est-à-dire, la différence de leur courbure avec la courbure des mers.

Or il est facile de voir que cette pente est en général peu considérable; car tous ces fleuves sont navigables, et leur mouvement devient très-lent lorsqu'ils approchent de leur embouchure. La nature nous offre même à cet égard un moyen de nivellement très-sûr dans les effets d'un de ses plus grands phénomènes. Deux fois par

Digitized by Google

jour l'océan s'élève et s'abaisse de plusieurs mètres par un mouvement d'oscillation régulier que l'on nomme *flux* et *reflux*. Les eaux des mers ainsi élevées, se précipitent dans l'intérieur des fleuves, et remontent jusqu'à des distances considérables de leur embouchure. Dans l'Amazone, par exemple, elles s'avancent à plus de 100 myriamètres (200 lieues). Il est donc démontré par le fait, que la pente des fleuves diffère peu de la courbure de l'océan : d'où il résulte encore que la convexité des continens est à fort peu près la même que celle des mers.

On voit maintenant que la recherche de la figure de la terre n'est pas aussi impraticable qu'elle le paraît au premier coup-d'œil ; les petites inégalités de la surface terrestre n'influent point sur sa forme générale.

145. Pour prendre une idée exacte de cette forme, il faut la mesurer successivement dans différens sens. Commençons donc par l'étudier dans le sens du méridien, puisque cette direction est la première que les observations nous aient fait connaître.

La chose serait facile si les méridiens terrestres étaient des courbes planes. Car les considérations très-simples que nous avons exposées dans le second chapitre, § 19, nous ont appris dès lors, que la courbure d'une courbe plane est toujours indiquée par les angles plus ou moins aigus que forment entre elles les perpendiculaires menées à ses différens points. Pour appliquer ce résultat à la terre, il suffirait donc alors de prendre, sur un même méridien, plusieurs points espacés à des distances connues, par exemple, à égales distances, et de déterminer les angles que leurs verticales forment entre elles ; car les verticales sont ici les perpendiculaires à la courbe du méridien.

Digitized by Google

Par ce moyen, on reconnaîtra tout de suite si la terre est exactement sphérique, car, dans ce cas, la courbure de ses méridiens doit être partout la même. Toutes les verticales concourront au centre; et quand les angles formés par ces verticales seront égaux, les arcs mesurés sur la surface terrestre devront l'être aussi sur quelque partie du méridien qu'ils soient observés. Voyez *fig.* 28, où C est le centre de la terre, AA', $A'A''$ des arcs égaux mesurés sur sa surface dans le sens du méridien. En général, dans le cas des méridiens circulaires, les angles des verticales sont proportionnels aux arcs compris entre elles.

Au contraire, si la terre n'est pas sphérique, on devra s'en appercevoir; car là où elle sera plus convexe, les verticales se rencontreront plutôt dans son intérieur; là où elles seront plus applaties, elles se rencontreront plus loin. Ainsi pour mesurer le même angle entre ces verticales, il faudra faire plus de chemin dans le second cas que dans le premier. Voyez la courbe AA' BB', *fig.* 29, l'angle C formé par les perpendiculaires AC, $A'C$ est égal à l'angle C' formé par les perpendiculaires BC', $B'C'$; mais la courbe étant plus convexe en E, plus applatie en P, l'arc BB' est plus grand que l'arc AA'.

146. Quoique nous ne sachions pas, *à priori*, si les méridiens terrestres sont des courbes planes, cependant comme cette supposition est la plus simple possible, il est naturel de l'essayer, et de voir si les observations y sont conformes. Mais je puis d'avance prévenir qu'elle approche si près de l'exactitude qu'il n'a pas encore été possible de mesurer la quantité dont elle s'en écarte, ou même de s'assurer d'une manière bien certaine qu'elle s'en écarte réellement. De plus, je dois avertir encore que la forme de la terre, déduite des observations, s'écarte

Digitized by Google

si peu de la forme sphérique, que la différence n'est pas du tout sensible sur une petite étendue, même dans les observations les plus exactes ; en sorte que pour appercevoir cette différence, il faut comparer entre elles des observations faites sur des parties très-éloignées d'un même méridien, ou sur différens méridiens, à des latitudes très-différentes. D'après cela, pour trouver, en chaque lieu, la valeur d'un degré du méridien, c'est-à-dire, la longueur de l'arc terrestre correspondant à un angle de 1° entre les verticales, il n'est pas nécessaire de chercher deux points dont les verticales fassent juste entre elles un angle de 1° ; ce qui serait très-difficile et presque impraticable. Mais on raisonnera comme si la terre était sphérique dans une petite étendue autour des points observés, ce qui permettra d'y supposer les arcs du méridien proportionnels aux angles des verticales. Si donc l'angle observé entre les verticales est a, et si M est la longueur de l'arc terrestre compris entre elles, on fera la proportion $a : M :: 1° : \frac{1°.M}{a}$, et la quantité $\frac{1°.M}{a}$ exprimera la longueur d'un degré terrestre à cette latitude, telle qu'on l'aurait mesurée directement.

147. La mesure d'un degré du méridien exige donc deux opérations distinctes. La première est le tracé de la méridienne et la mesure de l'arc terrestre. La seconde est la mesure de l'angle compris entre les verticales menées aux deux extrémités de l'arc mesuré.

Nous commencerons par cette dernière, parce que le procédé qu'elle exige peut s'énoncer en deux mots. Il suffit d'observer les latitudes des points extrêmes de l'arc mesuré. Les différences de ces latitudes sont les angles des verticales entre elles.

Car soient OZ, $O'Z'$, *fig.* 30, deux verticales menées

Digitized by Google

aux points O, O', du méridien OO', et supposons que ces verticales prolongées vers l'intérieur de la terre, se rencontrent au point C. Menons les horisons OH, $O'H'$, perpendiculaires à ces verticales, et les rayons visuels OP, $O'P'$, dirigés vers un même pôle, et par conséquent parallèles. Les angles POH, $P'O'H'$ représenteront les hauteurs du pôle sur les deux horisons; et si l'on mène OH'' parallèle à $O'H'$, l'angle HOH'' sera la différence de ces hauteurs. Or, l'angle HOH'' égale l'angle HCO ou $Z'CZ$. Par conséquent, *si dans deux points, situés sur un même méridien terrestre, on mesure la hauteur du pôle, ou la latitude, la différence de ces hauteurs ou des latitudes donnera l'angle formé par les deux verticales menées à ces points.*

Nous supposons que les deux verticales se rencontrent. Si le méridien terrestre est une courbe plane, cette rencontre aura lieu nécessairement, quelque éloignés que soient les points extrêmes de l'arc observé. Si le méridien n'est point une courbe plane, cette double courbure sera insensible, dans une étendue de quelques degrés comme celle qu'embrassent ordinairement les observations faites dans un même pays. Les verticales menées aux deux extrémités d'un si petit arc se rencontreront toujours, et on pourra toujours regarder l'angle formé entre elles, comme égal à la différence des latitudes.

148. Venons maintenant au tracé de la méridienne. Il s'agit de la prolonger sur une étendue de terrain considérable. L'instrument des passages, exactement dirigé dans le méridien, offre un moyen très-simple et très-exact d'y parvenir.

Cet instrument étant bien réglé par les observations des étoiles circompolaires, ou de toute autre manière, dirigez-le vers un objet terrestre et éloigné. Sur cet objet,

Digitized by Google

marquez un point qui soit sous le fil vertical du milieu de la lunette, et ce point sera dans le méridien. Une ligne menée de l'observateur ou du centre de la lunette à ce point, marquera donc la direction de la méridienne.

C'est ainsi qu'à Paris on a marqué, sur le palais du Luxembourg, un point qui est dans la méridienne de l'Observatoire. C'est par des moyens à-peu-près équivalens, quoique peut-être moins précis, qu'on a déterminé la position de la pyramide de Montmartre. Ainsi la méridienne placée dans la grande salle de l'Observatoire, étant prolongée vers le nord de 6000 mètres, passerait par cette pyramide. On peut marquer ainsi deux points dans une direction horisontale, N, S, l'un au nord, l'autre au sud de la lunette, et l'on aura une méridienne plus longue.

Transportez maintenant l'instrument des passages sur la verticale du point N qui servait tout-à-l'heure de signal nord. Etablissez-le au pied de cette verticale, c'est-à-dire, au point où elle perce la surface terrestre, et dirigez la lunette sur le signal S, ou ce qui revient au même, sur le point de la première station. Quand ce point sera sous le fil de la lunette, retournez celle-ci vers le nord, et placez sous le fil un autre signal N'; il se trouvera sur le prolongement de la première méridienne. En se transportant de même au pied de la verticale de N', et réglant la lunette sur N, on pourra déterminer, vers le nord, un troisième signal N'', et ainsi de suite indéfiniment. Si l'on désigne par A la première station, et par $PP'P''$ les pieds des diverses verticales, la suite des points A, P, P', P'' tracera sur la surface terrestre le prolongement de la méridienne de la première station, que l'on pourrait continuer ainsi, d'un bout à l'autre du continent.

Digitized by Google

149. La ligne tracée de cette manière ne sera véritablement un méridien terrestre que si ces méridiens sont des courbes planes; autrement les méridiens célestes des points A, P, P', P'' seront différens. Mais comme on le verra tout-à-l'heure par les résultats des observations mêmes, la différence est si petite qu'elle peut être négligée dans la petite étendue qu'embrassent ordinairement les observations faites dans un même pays.

Il faut de plus supposer que la surface du terrain est partout horisontale, c'est-à-dire, que sa convexité est la même que celle de la surface des mers, sans élévations ni abaissemens qui l'interrompent. Cette circonstance peut se rencontrer, quoique rarement, sur les rivages de la mer. C'est ainsi, par exemple, que [illegible] a tracé la direction de la méridienne en Pensylvanie; et l'intervalle des deux stations extrêmes étant mesuré avec une chaîne, s'est trouvé de 538077,94 pieds anglais, tels que les donne la toise de la Société Royale de Londres, réduite à la température de 16,25 du thermomètre centésimal.

De plus, la latitude de l'extrémité boréale de l'arc exactement observée s'est trouvée de . . . 39°. 56′. 19″

La latitude de l'extrémité australe s'est trouvée de. 38. 27. 34

Différence ou arc du méridien compris entre les stations . . . . . 1°. 28′. 45″

150. Maintenant, si l'on suppose la terre sensiblement sphérique dans une petite étendue autour des points observés, on pourra supposer les angles proportionnels aux arcs, et la longueur d'un degré sexagésimal sera $\frac{1^\circ.538077,94}{1^\circ.28'45''}$, ou 363771 pieds anglais. Si l'on veut réduire cette mesure à la toise française de l'Académie des Sciences, il faut

Digitized by Google

savoir qu'elle est, par rapport à celle de la Société Royale de Londres, comme 76,734 est à 72; d'où il suit que pour convertir le résultat précédent, en pieds français, il faut le multiplier par $\frac{72}{76,734}$; et si l'on veut ensuite l'exprimer en toises, il faut le diviser par 6, ou ce qui revient au même, le multiplier tout de suite par $\frac{12}{76,734}$. On obtient ainsi 56888 toises pour la longueur de 1° du méridien à la latitude de 39°. 11′. 56″. 5 moyenne entre les deux précédentes. S'il s'agissait d'un degré décimal ou d'un grade, il faudrait réduire le résultat précédent dans le rapport de 400 à 360, ou ce qui revient au même, il faudrait en prendre les $\frac{9}{10}$, ce qui donnerait 51199^t,2 pour la longueur d'un grade à la latitude de 43^g,5546. Cette belle opération a été faite par MM. Mason et Dixon (*).

Si la terre était exactement sphérique, on pourrait, d'après ce résultat, calculer ses dimensions; car la valeur de 1° séxagésimal étant 56888 toises, la circonférence entière serait 360 . 56888 = 20479680 toises. En mul-

(*) A parler rigoureusement, il n'y avait qu'une partie de la ligne, tracée par MM. Mason et Dixon, qui fût exactement dans la direction du méridien. Cette première partie avait, pour longueur, 104988,4 pieds anglais. On avait été ensuite obligé, par la configuration du terrain, de dévier un peu de la méridienne, et le reste de la ligne, tracée d'ailleurs de la même manière, faisait, avec le méridien, un angle de 3°.43′.30″. Cette petite déviation exigeait nécessairement que l'on diminuât la longueur, ainsi mesurée, qui était de 434011,6 pieds anglais, pour la réduire à ce qu'elle aurait été dans le plan du méridien. Or, cette réduction exige deux corrections, que j'ai exposées dans une note à la fin de ce livre, pour ne laisser absolument aucune obscurité sur un point aussi important que la figure de la terre.

Digitized by Google

tipliant ce nombre par $\frac{113}{355}$, rapport de la circonférence au diamètre, on aurait le diamètre de la terre égal à 6518884 toises, et son rayon égal à 3259442 toises. Mais ces résultats ne peuvent être considérés que comme provisoires, jusqu'à ce que nous ayons comparé entre elles les mesures des degrés à différentes latitudes.

151. Sans doute, le procédé que nous venons d'exposer est le plus simple que l'on puisse imaginer, mais les circonstances où l'on peut en faire usage se rencontrent bien rarement; et s'il a été possible de l'employer dans un pays inhabité, comme l'était alors la Pensylvanie, il deviendrait tout-à-fait impraticable dans notre Europe où le terrain est partout couvert de villes et d'habitations. Les astronomes ont donc été obligés de parvenir au même but par une méthode différente. Pour cela, ils se sont servi du procédé que l'on emploie dans la levée des plans, pour mesurer la distance des objets éloignés, en les observant des deux extrémités d'une *base* connue. On forme un enchaînement de triangles sphériques qui se suivent à-peu-près dans la direction de la méridienne. Voy. *fig.* 31. Le premier triangle *ABC* a pour sommet le point de départ *A*. Ses deux autres angles *B* et *C* ont pour sommets deux objets quelconques visibles. Ce premier triangle est horisontal. On observe ses angles, on mesure un de ses côtés *AB*, et on détermine l'angle qu'il fait avec la méridienne ou son azimuth *AM*. D'après ces données, le calcul fait connaître les deux autres côtés *AC*, *BC*, le point *M*, où *BC* est rencontré par le prolongement de la méridienne, et la distance *AM* comprise depuis ce point de rencontre jusqu'au point de départ *A*. On forme ensuite un second triangle horisontal *CBD*, avec les deux objets *CB*,

Digitized by Google

et un troisième *D*, que l'on puisse appercevoir de ces deux stations. A cause de la rondeur de la terre, ce second triangle n'est pas dans le plan du premier, il n'a de commun avec lui que le côté *BC*. Aussi le prolongement du premier côté *AM* de la méridienne s'élève au-dessus du plan de ce second triangle. Mais on le rabat sur ce plan, en le faisant tourner autour de *BC* comme autour d'un axe. Dans ce mouvement l'angle *M'MC* ne change pas, parce que *MM'* décrit une surface conique, et comme les deux triangles *ABC*, *BCD* sont presque dans le même plan, chaque point de *MM'* ne décrit qu'un très-petit arc de cercle, qui peut être considéré comme une ligne droite, perpendiculaire au plan du triangle *BCD*. De sorte que toute l'opération se réduit à plier le côté *MM'* suivant une verticale passant par le point *M'*. La méridienne ainsi prolongée rencontre le côté *BD* du second triangle, en un point *M'*, dont on détermine la position et la distance comme dans le cas précédent. On continue la série des triangles de la même manière, et de triangle en triangle on finit par enchaîner une très-grande étendue de terrain.

Telle est donc la nature de la courbe tracée par ces opérations, que l'on nomme *géodésiques*. Son premier côté est tangent à la surface de la terre; son second côté est le prolongement du premier, plié suivant une verticale, et ainsi de suite. Il est visible que cette construction donne le même résultat que le procédé employé en Pensylvanie.

152. Pour exécuter littéralement une pareille opération, il faudrait trouver une suite de points exactement placés à la même hauteur au-dessus de la surface terrestre, et disposés de manière à pouvoir servir de sommets aux triangles successifs. Alors, en effet, les côtés des triangles seraient

Digitized by Google

les cordes d'une même surface sphérique, la forme de la terre pouvant être considérée comme une sphère dans la petite étendue qu'embrasse ordinairement une opération de ce genre. Les angles mesurés seraient ceux que les cordes forment entre elles, et les plans des différens triangles suivraient la convexité de cette sphère, de manière à être toujours horisontaux. Un pareil choix de signaux est absolument impraticable à cause des inégalités de la terre; mais on peut y suppléer avec des signaux quelconques, à l'aide d'un calcul fort simple. En effet, soient A et B deux signaux ou sommets de triangles observés de la station O, et situés dans le plan OAB, *fig.* 32. Soit OZ la verticale du point O, et $A'OB'$ le plan de l'horison qui lui est perpendiculaire. Si l'on mène les verticaux ZAO, ZBO qui se couperont suivant la verticale, et si l'on mène les arcs ZA, ZB qui sont les distances zénithales des deux objets, on formera ainsi le triangle sphérique ZAB, dans lequel on connaîtra les trois côtés, savoir les deux distances zénithales, et l'angle AOB observé entre les deux objets. On pourra donc aisément calculer l'angle Z d'après les formules de la trigonométrie sphérique (*); et cet angle sera égal à $A'OB'$

(*) Soit a l'angle observé dans un plan incliné, et Z Z' les distances des deux signaux au zénith de la station où l'on observe; l'angle réduit à l'horison, étant représenté par A, sera donné par la formule

$$\sin \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin\left\{\frac{a+Z-Z'}{2}\right\} . \sin\left\{\frac{a+Z'-Z}{2}\right\}}{\sin Z . \sin Z'}}$$

Cette formule peut être simplifiée quand Z et Z' sont peu différens de 90°, et alors il est plus exact et plus commode d'en tirer la valeur de $A - a$, ou la *reduction à l'horison*.

Dans ce cas, il est utile d'introduire dans la formule les hauteurs

Digitized by Google

ou à la projection de l'angle observé, sur le plan de l'horison. Si l'on *réduit* ainsi *à l'horison* tous les angles observés à chaque station, on pourra concevoir toutes ces stations comme projetées sur une même surface sphérique qui sera celle de la terre, et comme formant, sur cette surface, une suite de triangles sphériques dont les angles seront connus. Avec ces données, et la longueur d'un des côtés mesurée directement, on calculera facilement tous les autres côtés, toutes les cordes, tous

---

apparentes h h', qui sont supposées très-petites, et dont les valeurs sont

$$h = 90 - Z \quad , \quad h' = 90 - Z' ;$$

ensuite, en élevant les deux membres de l'équation au carré, et développant les produits de sinus qui composent le second membre, il vient

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{\sin^2 \tfrac{1}{2} a - \sin^2 \tfrac{1}{2} (h - h')}{\cos h \,.\, \cos h'} .$$

Retranchons de part et d'autre $\sin^2 \frac{1}{2} a$, afin d'introduire les différences des sinus, nous aurons

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} A - \sin^2 \tfrac{1}{2} a = \frac{\sin^2 \tfrac{1}{2} a \left\{ 1 - \cos h \cos h' \right\} - \sin^2 \tfrac{1}{2} \left\{ h - h' \right\}}{\cos h \cos h'} ;$$

or, il est facile de voir que l'on a, en général,

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} A - \sin^2 \tfrac{1}{2} a = \sin \tfrac{1}{2} \left\{ A + a \right\} \,.\, \sin \tfrac{1}{2} \left\{ A - a \right\}$$

$$1 - \cos h \,.\, \cos h' = \sin^2 \tfrac{1}{2} \left\{ h + h' \right\} + \sin^2 \tfrac{1}{2} \left\{ h - h' \right\}$$

En faisant ces substitutions, la formule devient

$$\sin \tfrac{1}{2} \left\{ A + a \right\} \,.\, \sin \tfrac{1}{2} \left\{ A - a \right\} = \frac{\sin^2 \tfrac{1}{2} a \sin^2 \tfrac{1}{2} \left\{ h + h' \right\} - \cos^2 \tfrac{1}{2} a \,.\, \sin^2 \tfrac{1}{2} \left\{ h - h' \right\}}{\cos h \cos h'} .$$

Digitized by Google

les angles compris entre ces cordes, et enfin la longueur de la méridienne elle-même, puisque la chose se trouve ainsi ramenée au cas mathématique que nous avons envisagé d'abord. Ces calculs peuvent être abrégés par diverses méthodes qui sont expliquées avec détail dans la mesure de la méridienne de France; et c'est là qu'il faudrait recourir si l'on était appelé à les appliquer. Mais ce qui précède suffit pour en faire connaître l'objet, et

---

Maintenant, comme les hauteurs apparentes h et h' sont fort petites, on voit que la valeur de $\sin \frac{1}{2} \left\{A - a\right\}$ sera fort petite aussi; on pourra donc négliger le carré de cette correction, ce qui revient à supposer $A = a$ dans le facteur $\sin \frac{1}{2} (A + a)$ qui multiplie le premier nombre, et l'on a ainsi

$$\sin \tfrac{1}{2} \left\{A - a\right\} = \frac{\sin^2 \frac{1}{2} a \sin^2 \frac{1}{2} \left\{h + h'\right\} - \cos^2 \frac{1}{2} a \sin^2 \frac{1}{2} \left\{h - h'\right\}}{\sin a \cos h \cos h'},$$

ou, ce qui revient au même,

$$\sin \tfrac{1}{2} \left\{A - a\right\} = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} a \sin^2 \frac{1}{2} \left\{h + h'\right\} - \cot \frac{1}{2} a . \sin^2 \frac{1}{2} \left\{h - h'\right\}}{2 \cos h \cos h'}.$$

La première de ces expressions pourrait encore s'approprier au calcul logarithmique, en prenant un angle auxiliaire y, tel qu'on ait

$$\operatorname{tang} y = \frac{\sin \frac{1}{2} \left\{h - h'\right\}}{\sin \frac{1}{2} (h + h')};$$

car on auroit alors

$$\sin \tfrac{1}{2} \left\{A - a\right\} = \frac{\sin^2 \frac{1}{2} \left\{h + h'\right\} . \sin \left\{\frac{1}{2} a + y\right\} . \sin \left\{\frac{1}{2} a - y\right\}}{2 \sin a \cos h \cos h' \cos^2 y},$$

et le plus souvent, si les hauteurs h h' sont fort petites, on pourra supposer dans le dénominateur $\cos h \cos h' = 1$.

Digitized by Google

pour donner une idée exacte de toutes les parties d'une opération géodésique (*).

153. C'est ainsi qu'en 1670, Picard, membre de l'Académie des Sciences, joignit les parallèles de Malvoisine et d'Amiens ; car la première mesure exacte de la grandeur de la terre a été faite en France. Cette méthode a été depuis employée par un grand nombre d'astronomes dans différens pays, et l'on a eu ainsi plusieurs mesures des degrés du méridien, à diverses latitudes.

Voici les longueurs de ces degrés, exprimées en toises. Elles sont toutes converties en degrés décimaux ou en grades, ce qui est infiniment plus commode pour les comparaisons, et plus expéditif pour les calculs. Je ne rapporte ici que les résultats généralement regardés comme les plus exacts.

LIEUX des OBSERVATIONS.	LATITUDES boréales.	LONGUEUR du degré en toises.	NOMS des OBSERVATEURS.
Le Pérou.....	0°.0000	51077t.70	Bouguer.
La Pensylvanie.....	43. 5556	51199. 20	Mason et Dixon.
L'Italie.....	67. 7963	51281. 10	Boscovich et Lemaire.
La France.....	51. 3327	51316. 58	Delambre et Méchain.
La Suède.....	73. 7073	51473. 01	Melanderhielm.

(*) On sait que la somme des trois angles d'un triangle sphérique surpasse toujours deux angles droits; la différence se nomme l'excès sphérique. On trouve dans les Traités de trigonométrie, particulièrement dans celui de M. Legendre, les formules qui servent à l'évaluer. Ces formules ont été réduites en tables, dans la mesure de la méridienne, pour des triangles très-peu courbes, comme sont ceux

Digitized by Google

154. A la seule inspection de cette table, on voit que les degrés des méridiens terrestres sont inégaux. Ainsi la terre n'est pas sphérique. Le degré de Suède surpasse de 395t,6 celui de l'équateur, et généralement la longueur des degrés va en augmentant de l'équateur au pôle. La convexité des méridiens va donc en diminuant dans le même sens (145). Par conséquent la terre est un sphéroïde applati aux pôles et renflé à l'équateur. En combinant les mesures précédentes, on trouve que l'accroissement des degrés, de l'équateur au pôle, est à fort peu près proportionnel au carré du sinus de la latitude (*).

Mais on voit en même tems que la différence de ce sphéroïde à une sphère, est extrêmement petite; car la plus grande différence qui existe entre ces degrés n'est pas la cent-vingtième partie de la longueur totale d'un d'entre eux. On peut donc, dans une première approximation, regarder la terre comme une sphère, sans égard pour ces petites inégalités.

---

que l'on emploie dans les observations géodésiques. Alors le calcul donne la règle suivante. Faites la somme des trois angles sphériques observés, réduits à l'horison; prenez l'excès de cette somme sur deux angles droits, ce sera l'excès sphérique du triangle : prenez-en le tiers, et retranchez-le de chacun des angles sphériques, leur somme ne vaudra plus alors que deux angles droits; après cette correction, vous pouvez calculer le triangle comme s'il était rectiligne. L'excès sphérique augmente proportionnellement à l'aire du triangle. Le plus grand que l'on ait encore observé a été celui de l'immense triangle que nous avons mesuré, Arago et moi, pour joindre l'île d'Iviza, à la côte d'Espagne, dans les opérations de la méridienne. L'excès sphérique était de 39″ sexagésimales; dans les autres triangles de la méridienne, il ne s'était élevé qu'à 4″.

(*) Les expressions des degrés calculées d'après cette loi, sont rapportées dans la note de la page 164, et l'on peut voir qu'elles sont conformes aux observations.

Digitized by Google

155. Les mesures des degrés faites dans l'hémisphère boréal prouvent, comme on vient de le voir, que les méridiens terrestres ne sont pas tout-à-fait des cercles; on a même lieu de croire que les deux moitiés de la terre situées de part et d'autre de l'équateur ne sont pas exactement semblables. Un degré mesuré au cap de Bonne-Espérance, sous une latitude de 37,0093 australe s'est trouvé de 51333t,30, et par conséquent plus grand que le degré mesuré en France par une latitude boréale de 51°.

Il paraît donc, qu'à considérer les choses avec la dernière exactitude, la figure de la terre est réellement irrégulière et fort compliquée.

156. Au milieu de ces irrégularités, ce que l'on peut faire de mieux, c'est d'imaginer quelque courbe qui approche autant que possible de représenter les observations, c'est-à-dire, sur laquelle l'accroissement des degrés de l'équateur au pôle soit conforme à ce que l'on observe réellement. Cette courbe sera nécessairement différente du cercle. Elle doit être alongée à l'équateur où les degrés sont plus petits que dans tout le reste de la terre, et applatie aux pôles où ils sont plus grands. L'ellipse est la forme la plus simple qui se présente avec ces conditions, en plaçant le grand axe dans le plan de l'équateur, le petit dans le sens des pôles, et le centre au centre de la terre. Mais cela ne suffit pas encore; il y a une infinité d'ellipses que l'on peut placer de cette manière, et dont la forme sera différente; il faut donc choisir celle qui s'accorde le mieux avec les degrés mesurés. Pour avoir une idée nette de cette opération, il faut savoir que, par chaque point d'une ellipse ou de toute autre ligne courbe, on peut mener un cercle qui la touche, et qui en approche de plus près que tout autre cercle. Ce cercle que l'on nomme *osculateur* se

Digitized by Google

confond avec l'ellipse dans une petite étendue autour du point de tangence, en sorte que, dans cette étendue, l'on peut supposer les degrés mesurés sur sa circonférence au lieu de les rapporter sur l'ellipse. Le rayon du cercle osculateur varie avec la courbure de l'ellipse. Il n'est donc pas le même dans les différens points de son contour. Mais le calcul fait connaître sa valeur pour chaque latitude en fonction des deux axes de l'ellipse. Cette valeur étant multipliée par $\frac{2.355}{113}$ rapport de la circonférence au rayon, et divisée par 400, donne l'expression de la longueur d'un degré centesimal ou d'un grade. En égalant donc cette expression aux longueurs observées de deux degrés mesurés à deux latitudes différentes, on a deux équations par lesquelles on peut déterminer les deux axes de l'ellipse qui sont les deux inconnues du probléme, et alors tout étant connu dans l'expression d'un degré quelconque, on calcule cette expression pour chaque latitude, et on trouve que le résultat du calcul approche si près de l'observation que la différence est absolument négligeable, même dans les recherches les plus délicates (*).

157. Pour l'obtenir avec exactitude, il faut combiner ensemble des degrés mesurés à des latitudes très-différentes et sur-tout exactement observés. Sous ce double rapport, l'arc mesuré à l'équateur par Bouguer et La Condamine, et l'arc mesuré en France par Delambre et Méchain paraissent mériter la préférence. En les combinant ensemble comme nous venons de le dire, M. Delambre a trouvé pour l'ellipse les résultats suivans exprimés en toises de l'Académie.

(*) *Voy.* à la fin du livre la note relative à la figure de la terre.

Digitized by Google

Demi grand axe ou rayon de l'équateur . . 3271864^t
Demi petit axe ou rayon du pôle 3261265
Différence des deux demi-axes 10599

Cette différence, divisée par le demi-grand axe, s'appelle l'*applatissement de la terre*, parce qu'en effet selon qu'elle est plus ou moins grande, l'ellipsoïde terrestre est plus ou moins applati au pôle. L'applatissement déduit des valeurs précédentes est $\frac{1}{308,65}$; et ce résultat est confirmé de plusieurs autres manières; car on a découvert, par la théorie, que divers phénomènes du mouvement de la lune dépendent de l'applatissement de la terre, et concourent à lui assigner une valeur très-peu différente de celle-ci. On voit que l'ellipse terrestre est extrêmement peu différente d'un cercle, comme cela était facile à prévoir par le peu de différence des degrés.

D'après les valeurs précédentes, le quart du méridien terrestre, considéré comme elliptique, a pour longueur 5131111 toises.

Le progrès des lumières ayant fait sentir la nécessité de ramener toutes les mesures à une même unité fondamentale, on a choisi, pour cette unité, la dix-millionième partie du quart du méridien terrestre, considéré comme elliptique, et on lui a donné le nom de MÈTRE qui signifie *mesure*. D'après le résultat que nous venons de rapporter, la valeur du mètre, exprimée en parties de la toise de l'Académie, seroit $0^t,5131111$ ou 3 pieds 11 lignes et $\frac{328}{1000}$, ou enfin en lignes 443,328.

158. Mais l'urgente nécessité d'établir ce système ayant fait adopter le premier résultat des opérations avant qu'elles fussent définitivement et totalement calculées,

Digitized by Google

on trouva d'abord, pour le quart du méridien, une valeur un peu différente de la précédente, et égale à 5130740t. De sorte que le mètre adopté par les lois françaises est égal à 0t,5130740, ou 3 pieds 11 lignes et $\frac{296}{1000}$, ou enfin en lignes 443,296; la toise de l'Académie étant prise à 16,75 du thermomètre centésimal.

159. Ce résultat est plus petit que celui de M. Delambre de $\frac{32}{1000}$ de ligne, mais il n'en peut jamais résulter aucune erreur. Car, ce qu'il importe de connaître avec exactitude, c'est la longueur absolue de la nouvelle mesure appelée mètre, ou son rapport avec une autre mesure connue qui est ici la toise de l'Académie; et ce rapport étant fixé par les lois à 0,5130740, les étalons du mètre ont été construits de manière à s'y trouver exactement conformes. Ainsi en employant le mètre légal on emploie réellement 0t,5130740; et s'il se trouve que notre mètre n'est pas exactement égal à la dix-millionième partie du quart du méridien terrestre, cela ne fait absolument rien, ni pour le calcul, ni pour les résultats qu'on en peut tirer, puisqu'il suffit d'avoir une idée fixe de la mesure dont on fait usage.

Il est d'autant plus convenable de s'en tenir à la valeur légale du mètre, que l'évaluation du quart du méridien en toises pourra peut-être subir encore quelques légers changemens, soit par de nouvelles mesures de la terre, faites encore avec plus d'exactitude, s'il est possible, soit par l'extension que l'on pourra donner à la première opération; par exemple, si l'on calculait le mètre d'après l'ensemble des opérations faites en France et en Espagne, on le trouverait précisément tel que les lois françaises le déterminent. Pour mettre en évidence ce résultat important, il faut se rappeler que le résultat donné par M. Delambre, n'est conclu que de

Digitized by Google

l'arc mesuré par lui et Méchain entre Dunkerque et Montjouy. Après la mort de Méchain, suite des fatigues qu'il avait éprouvées dans cette opération pénible, nous avons, Arago et moi, prolongé cet arc, en Espagne, jusqu'à la petite île de Formentera, la plus australe des Pithiuses. Comme le nouvel arc s'étend presque tout entier sur la mer, on l'a mesuré en prolongeant une suite de triangles sur la côte d'Espagne, depuis Barcelonne jusqu'au royaume de Valence, et l'on a joint la côte de Valence aux îles par un immense triangle, dont un des côtés avait 160008 mètres (41 lieues $\frac{1}{3}$). A de si grandes distances, les signaux de jour eussent été invisibles; on a employé des signaux de nuit, formés par des lampes à courant d'air, munies de réflecteurs, que l'on entretenait constamment depuis le coucher du soleil jusqu'à son lever; et toutes les observations nécessaires pour les triangulations ont été faites de nuit avec des cercles répétiteurs.

La latitude de la station de Formentera, la plus australe de l'arc, a été pareillement déterminée avec le cercle répétiteur, par 2558 observations de l'étoile polaire; et cette latitude, exprimée en degrés décimaux, ou en grades, s'est trouvée de . . . . . 42°.961777

Celle de la tour de Dunkerque, observée par M. Delambre, et pareillement conclue des observations de l'étoile polaire, est de 56, 706652

Différence, ou arc du méridien compris entre le parallèle de la station de Formentera et celui de la tour de Dunkerque . . 13, 744875

La longueur terrestre de ce même arc a été très-exactement déterminée, d'après l'enchaînement des triangles, et, en l'exprimant en fonction du MÈTRE fixé par les lois, sa valeur a été trouvée de 1374438,72

Au moyen de ces résultats, on peut aisément vérifier si le mètre légal est réellement la dix-millionième partie du quart du méridien terrestre, supposé elliptique. En effet, si la terre était sphérique, tous les degrés de latitude seraient égaux entre eux; et le quart du méridien contenant 100 grades, chaque grade vaudrait 100000 mètres. Ainsi, en multipliant par 100000, la valeur de l'arc céleste, compris entre Formentera et Dunkerque, on aurait la distance des parallèles de ces deux stations exprimée en mètres, laquelle serait . . $1374487^{m},50$

Mais l'applatissement de la terre exige que l'on diminue ce résultat d'une petite quantité, afin de le ramener au cas du méridien elliptique. Pour calculer cette correction, nous adopterons l'applatissement $\frac{1}{303}$, qui est donné par la théorie de la lune; car les mouvemens de ce satellite étant liés à ceux de la terre, ses variations décèlent, comme on le verra par la suite, l'ellipticité du sphéroïde terrestre, et elles en fournissent une mesure qui est, peut-être, la plus probable de toutes. En effet, cette mesure appartient à l'ensemble de la terre, indépendamment des petites irrégularités de sa surface, qui disparaissent à la distance où la lune est placée. On trouve ainsi qu'il faut retrancher $48^{m},37$ de l'arc du méridien calculé pour la terre sphérique; et, par la petitesse de cette correction, on peut juger qu'une légère erreur sur l'applatissement n'aurait ici aucune influence sensible. Cela tient à ce que le milieu de l'arc répond à-peu-près à la latitude de 50 grades, intermédiaire entre l'équateur et le pôle; mais la démonstration de cette particularité ne saurait être donnée ici. Avec cette réduction, la distance des parallèles de Formentera et de Dunkerque, sur le sphéroïde, conclue de

Digitized by Google

l'arc céleste, devient . . . . . $1374439^{m},13$

Par les mesures des triangles, cette distance est 1374438,72

Différence entre ces deux évaluations . $0^{m},41$

Telle est donc l'erreur que l'emploi du mètre légal produit sur un aussi grand arc. La petitesse de cette erreur est réellement surprenante : elle aurait pu être quarante ou cinquante fois plus considérable, qu'il n'en serait résulté aucun inconvénient sensible dans les opérations les plus délicates des arts. La valeur légale du mètre se trouve donc vérifiée par cette épreuve.

Veut-on la calculer d'après les résultats précédens, il faut partir de la distance des parallèles, donnée par la mesure des triangles : cette distance est $1374438^{m},72$; on y ajoutera $48^{m},37$ pour la ramener au cas du méridien sphérique, ce qui portera sa valeur à $1374487^{m},09$. Cette valeur est exprimée en fonctions du mètre légal. En la multipliant par 0,513074, on la convertira en toises, et la divisant ensuite par l'arc céleste multiplié par 100000, on aura la nouvelle valeur du MÈTRE en toises, ou la dix-millionième partie du quart du méridien conclu de cette opération, cette valeur sera $\frac{1374487,89.0^{t},5130740}{1374487,50}$, ou, ce qui revient au même, ... $0^{t},5130740 - \frac{0,41.0^{t},5130740}{1374487,5}$. Le premier terme est l'ancienne valeur du mètre, et le second est la correction qu'il faut y faire en vertu de la nouvelle opération. Or, ce dernier terme ne vaut pas $\frac{2}{10000}$ de ligne, comme il est facile de s'en assurer par la division. On peut donc le négliger sans commettre aucune erreur sensible.

Digitized by Google

Suivant ce résultat, notre mètre légal serait exactement la dix-millionième partie du quart du méridien. Mais comme on a jugé utile de vérifier de nouveau la latitude de Dunkerque, on trouvera peut-être encore quelques modifications à faire à ce résultat. D'après tout cela, on voit qu'il est très-sage d'adopter définitivement la valeur légale du mètre et son rapport à la toise de l'Académie ; le reste n'étant qu'une question scientifique étrangère à toutes les applications.

160. Nous pouvons maintenant réduire en mètres les valeurs données, par M. Delambre, pour les axes de la terre ; il suffit de les diviser par 0,5130740, on trouvera ainsi :

Rayon de l'équateur en mètres	6376984
Rayon du pôle	6356324
Applatissement $\frac{1}{308,65}$	20660
Quart du méridien	10000723

On peut de même, d'après l'équation de l'ellipse, calculer la longueur du rayon terrestre en mètres, pour une latitude quelconque donnée (*). Un de ces rayons nous intéresse particulièrement, c'est celui qui, répondant à

(*) Soit L la latitude ; S le degré sexagésimal du méridien à cette latitude ; D le degré décimal ; R le rayon terrestre. Prenons pour unité la dix-millionième partie du quart du méridien terrestre, supposé elliptique, avec l'applatissement $\frac{1}{308,65}$. Les valeurs de S, D, R, en parties de cette unité ou en *mètres*, seront données par les formules suivantes, tirées de l'ouvrage de M. Delambre sur la méridienne.

$$S = 111111^{m},1111 - 540^{m},848 \cos 2L$$
$$D = 100000^{m}. - 486^{m},763 \cos 2L$$
$$\log R = 6,8038861 + 0,0007150 \cos 2L$$

Digitized by Google

la latitude de 50 grades, est intermédiaire entre l'équateur et le pôle, et peut être considéré comme le rayon moyen de la terre. D'ailleurs le parallèle auquel il répond passe à-peu-près au milieu de la France. En faisant le calcul on trouve :

Rayon terrestre à la latitude de 50s..... 6366745m.
ou 3266611t.
Longueur du degré décimal à cette latitude. 100007m.
Longueur du degré sexagésimal en toises... 57012.

161. Jusqu'ici nous n'avons examiné la figure de la terre que dans le sens des méridiens : pour la connaître complètement, il faudrait l'étudier aussi dans le sens des parallèles. On y parviendrait en traçant, dans ce sens, des *lignes géodésiques*, par les mêmes procédés que nous avons

---

Comme $\cos 2L = 1 - 2\sin^2 L$, on voit que la longueur des degrés croît, de l'équateur au pôle, proportionnellement au carré du sinus de la latitude.

Si l'on suppose que le mètre légal est réellement la dix-millionième partie du quart du méridien, en multipliant les valeurs de S, D, R par 0,5130740, on les réduira en toises.

Mais si l'on suppose le quart du méridien égal à 5131111 toises, et le mètre véritable $= 0^t,5131111$, il faudra, pour réduire les valeurs de S, D, R en toises, les multiplier par cette quantité.

Ou bien, si l'on voulait exprimer S, D, R en parties du mètre légal, en supposant toujours le quart du méridien égal à 5131111 toises, il faudrait multiplier leurs valeurs par le rapport de ce mètre au véritable, c'est-à-dire, par $\frac{5131111}{5130740}$, ou par. . . . . $1 + \frac{371}{5130740} = 1,0000723$. C'est ainsi que nous en avons usé dans le texte. On opérerait de la même manière, si des mesures subséquentes donnaient, pour le quart du méridien en toises, une autre valeur que 5131111.

Digitized by Google

exposés pour la méridienne. Seulement le premier côté de ces lignes, au lieu d'être situé dans la direction du méridien, lui serait perpendiculaire. C'est pourquoi on les nomme *des perpendiculaires à la méridienne.*

Mais il faut faire ici une remarque importante. Ces lignes géodésiques ne sont pas des parallèles terrestres. A la vérité, elles ont avec les parallèles une propriété commune, qui est de couper à angles droits le méridien du point de départ. Mais les parallèles conservent cette propriété à l'égard de tous les autres méridiens qu'ils rencontrent, au lieu que les perpendiculaires n'en jouissent que par rapport au premier. Par cette raison, à mesure qu'elles s'éloignent de ce plan, elles s'écartent de plus en plus du parallèle avec lequel elles coïncidaient d'abord. Par exemple, si l'on suppose la terre sphérique, les perpendiculaires à la méridienne sont des arcs de grands cercles dont le plan passe par le centre de cette sphère ; et toutes les perpendiculaires à un même méridien se coupent aux pôles de ce méridien, à 100e de leurs points de départ.

162. Si la terre est un sphéroïde de révolution, les parallèles terrestres sont des cercles. Mais si la terre n'est pas un sphéroïde de révolution, ce sont des courbes à double courbure. On n'a point pris encore sur cet important objet de mesure directe assez exacte. Cependant l'opération de la méridienne y a jeté quelque lumière. Comme le réseau des triangles s'écarte un peu de part et d'autre de cette ligne, les azimuths des différens côtés, c'est-à-dire, les angles qu'ils forment avec la méridienne dépendent de la figure des parallèles. Or, les mesures qu'on en a faites ne s'accordent pas tout-à-fait avec ce qui aurait lieu sur une sphère ; elles indiquent avec vraisemblance l'ellipticité des parallèles. Pour acquérir sur ce point des notions bien plus certaines, nous avions conçu,

Digitized by Google

Arago et moi, le projet de mesurer trois degrés de parallèle à l'extrémité australe de notre méridienne. Il s'était chargé de l'exécuter, et il avait déja mesuré un degré et demi, lorsque les circonstances de la guerre ont interrompu ces travaux, et l'ont exposé lui-même à mille dangers. Mais ce qu'il a fait suffira pour montrer si les parallèles terrestres sont elliptiques. On a depuis longtems conçu l'idée de mesurer un grand arc de parallèle entre Brest et Strasbourg, dans la plus grande largeur de la France, et tous les amis des sciences doivent desirer que l'on mette ce projet à exécution. C'est tout ce qui reste à faire pour avoir des notions exactes sur la figure de la terre.

163. En attendant, on peut se borner à la considérer comme un ellipsoïde de révolution autour de l'axe qui passe par les pôles. Si cette supposition n'est pas tout-à-fait exacte, du moins elle ne doit pas s'écarter beaucoup de la vérité, et l'erreur qu'elle peut introduire dans les résultats sera tout-à-fait insensible dans presque toutes les applications qu'on en fait.

Pour fixer complètement nos idées sur les conséquences géométriques de cette supposition, je vais les rendre sensibles par la fig. 33. Soit *MEOP*, l'ellipse qui représente le méridien terrestre. Le demi grand axe *CE* sera le rayon de l'équateur; le demi petit axe *CP* sera le rayon du pôle. Pour un point quelconque *O*, situé sur le méridien, *CO* sera le rayon terrestre, et en menant la normale *NOZ*, ce sera la verticale du lieu, et *Z* le zénith, tel qu'il est donné par l'expérience du fil à-plomb. C'est donc autour de cette verticale que l'on observe les distances zénithales des astres, et non pas autour du rayon terrestre, comme dans le cas de la terre sphérique. Par cette raison, et conformément aux définitions générales données dans l'article 137, la latitude dans l'ellipsoïde sera égale à l'angle

Digitized by Google

ENO formé par la normale avec l'axe de l'équateur, au lieu que dans la sphère elle était donnée par l'angle *ECZ'* formé par ce même axe avec le rayon terrestre. Toutes ces différences viennent de ce que le rayon terrestre et la verticale forment deux lignes distinctes et séparées, excepté au pôle et à l'équateur, où elles se confondent; parce qu'alors la tangente de l'ellipse devient perpendiculaire à ses axes. Mais, entre ces points, l'angle *ZOZ'* varie suivant des lois faciles à calculer (*), et ses valeurs absolues dépendent de l'applatissement de l'ellipse. Si cet applatissement est très-petit, la plus grande valeur se trouve, à fort peu près, lorsque la latitude est de 50 grades. Elle serait alors de $11'.9''.39$, en supposant l'applatissement $\frac{1}{308,65}$, tel que le donne la comparaison des degrés mesurés en France et à l'équateur.

164. On peut même, dans la plupart des applications, négliger l'applatissement de la terre, et la supposer tout-à-fait sphérique; c'est ainsi qu'on en use ordinairement dans les mesures nautiques. Alors il convient de prendre pour rayon de cette sphère le rayon moyen qui répond à la latitude de 50g, et sur lequel la longueur d'un degré sexagésimal est égale à 57012 toises. La vingtième partie

---

(*) Nommant L la latitude, et adoptant l'applatissement $\frac{1}{308,65}$, on a l'angle de la verticale avec le rayon, ou ZOZ',

$$ZOZ' = 11'.9''.39, \sin 2L - 1''.086 \sin 4L.$$

Si l'on négligeait le dernier terme qui est fort petit, la plus grande valeur de ZOZ' aurait lieu quand $L = 50^g$, parce qu'alors $\sin 2L = 1$. Le coefficient $11'.9''.39$ varie à fort peu près proportionnellement à l'applatissement. On pourrait donc par une simple proportion trouver la valeur de ce coefficient pour tout autre applatissement que $\frac{1}{308,65}$.

Digitized by Google

de cette longueur forme une mesure généralement employée dans les voyages de mer ; on la nomme une lieue marine : elle contient 2850 toises $\frac{6}{10}$. Il est visible que chaque lieue marine répond à trois minutes sexagésimales en arc.

Il y a encore une autre lieue fort usitée dans les mesures géographiques ; c'est la lieue commune de 25 au degré : elle contient 2280 toises et $\frac{5}{10}$. Le rayon moyen de la terre, exprimé de cette manière, contiendrait $1432^{l},4$, et l'applatissement 4,65.

Mais le progrès des lumières devra faire nécessairement disparaître ces mesures diverses, arbitraires, et ces dénominations multipliées. Il est infiniment plus commode de ramener toutes les mesures à une seule, qui est le mètre, en les faisant dépendre les unes des autres, selon la division décimale, la plus simple de toutes. Tel est l'objet, tels sont les avantages du *système métrique des poids et mesures* maintenant adopté en France par les lois.

165. L'applatissement de la terre étant très-petit et presque égal à $\frac{1}{309}$, il ne donnerait qu'une différence de 1 millimètre (0 lig., 44) sur un sphéroïde dont le demi grand axe aurait 310 millimètres (11 pouces 5 lig. $\frac{41}{100}$), et le demi petit axe 309 (11 pouces 4 lig. $\frac{97}{100}$). Une si petite quantité serait très-difficile à représenter avec exactitude, et si l'on y parvenait, elle serait tout-à-fait insensible à la vue. On peut donc négliger l'applatissement de la terre dans la construction des globes destinés à la géographie, et continuer à les faire exactement sphériques.

166. On peut même négliger cet applatissement dans les voyages maritimes, et y supposer tous les degrés de latitude égaux entre eux. Car la différence qui en pourrait résulter, même sur une longue route, ne pourrait jamais occasionner une erreur qui fût, pour les navigateurs

Digitized by Google

de quelque importance, ou qui pût les exposer à quelque danger. Cette connaissance leur est fort utile pour régler leur route ; car en observant tous les jours les hauteurs méridiennes des étoiles, ils voient par les accroissemens et les diminutions de ces hauteurs, s'ils ont marché vers le sud ou vers le nord; et en comptant 20 lieues marines pour chaque degré de l'ancienne division sexagésimale, ou 3 minutes pour chaque lieu marine, ils connaissent le chemin qu'ils ont parcouru. Aussi cette méthode est-elle depuis longtems en usage à la mer; et cela même devait donner lieu de croire que la terre était presque sphérique avant qu'on l'eût mesurée exactement. En effet, si la différence eût été un peu considérable, les navigateurs, qui la regardaient comme nulle, se seraient trouvés inopinément devant des terres qu'ils auraient crues encore éloignées. C'est ce qui n'arrive jamais, au moins par l'erreur de la latitude ; mais cela arriverait, par exemple, si les navigateurs regardaient comme égaux les degrés des différens parallèles mesurés près du pôle et près de l'équateur. En effet en appliquant ici les raisonnemens que nous avons faits dans l'article 120, relativement aux parallèles célestes, on voit que la longueur des degrés des parallèles terrestres décroît, en allant de l'équateur vers le pôle, et qu'elle est constamment proportionnelle au sinus de la distance polaire du parallèle, ou au cosinus de la latitude, en supposant la terre sphérique. Aussi les navigateurs ont-ils égard à leur différence, comme nous le dirons bientôt.

167. Les résultats que nous venons d'obtenir nous mettent en état de comparer exactement la hauteur des montagnes avec les dimensions du globe terrestre. La plus haute des montagnes connues est le *Chimboraço*, qui n'a pas plus de 3200 toises d'élévation en ligne verticale. C'est

Digitized by Google

un peu plus d'une lieue marine. Le diamètre de la terre contient environ 2292 de ces lieues. Ainsi, en représentant le globe terrestre par une boule de 2292 millimètres (8 pieds environ) de diamètre, le Chimboraço serait figuré par une saillie d'environ un millimètre (une demi-ligne). Sur une boule de 57 millimètres (2 pouces) de diamètre, il le serait par une saillie quarante fois plus petite, en sorte qu'on pourrait à peine l'appercevoir. Les petites aspérités qui se rencontrent sur la peau d'une orange sont beaucoup plus sensibles.

168. Comme les résultats auxquels nous sommes parvenus dans ce chapitre sont d'un très-fréquent usage, nous en réunirons les valeurs dans le tableau suivant, où elles seront plus faciles à consulter.

	En toises.	En mètres.	En lieues communes de 2280 toises.
Rayon de l'équateur . . *A*	3271864	6376984	1434.8
Rayon du parallèle moyen à la latitude de 50 grades.	3266611	6366745	1432.4
Rayon du pôle. . . . . *B*	3261265	6356324	1430.1
Applatissement. . . *A—B*	10600	20660	4.65
Degré moyen sexagésimal. .	57012	111119	
Deg. moyen décim. ou grade.	51311	100007	

Dans ces évaluations, tirées de l'ouvrage de M. Delambre, sur la méridienne, l'applatissement est supposé $\frac{1}{308,65}$, le quart du méridien 5131111 toises, et le mètre $0^t,5130740$, conformément à la valeur établie en France par les lois.

Digitized by Google

CHAPITRE XV.

Manière de fixer la position des différens points de la Surface terrestre.

169. Les connaissances que nous venons d'acquérir sur la figure de la terre nous permettent de déterminer avec exactitude les positions relatives des divers points de sa surface, c'est-à-dire la situation précise des différens lieux, leurs distances mutuelles; en un mot, tous les résultats rigoureux de la géographie mathématique. Entrons dans quelque détail sur cette utile application.

Lorsqu'on veut représenter exactement la configuration d'un terrain, et fixer la position des principaux objets qui y sont situés, on lie ces objets par des triangles dont on mesure les angles et dont on calcule les côtés; cela s'appelle *lever un plan*.

Si le terrain que l'on doit mesurer est considérable, par exemple s'il s'agit d'une province ou d'un grand pays, on le traverse d'un bout à l'autre par une méridienne, que l'on trace suivant les procédés que nous avons indiqués. Ensuite on choisit sur cette méridienne un certain nombre de points plus ou moins rapprochés, et par ces points on trace autant de *perpendiculaires à la méridienne*, toujours par les procédés que nous avons décrits. La méridienne et les perpendiculaires forment ainsi un système de coordonnées curvilignes, auxquelles on peut rapporter les différens points de la surface terrestre. En

Digitized by Google

effet, la situation d'un objet est évidemment déterminée lorsqu'on connaît 1°. sa distance à la méridienne, distance qui se mesure sur la perpendiculaire; 2°. l'arc de la méridienne compris entre la perpendiculaire et le point que l'on a choisi sur cette méridienne pour lieu de départ. Pour tracer ces résultats sur un plan, on suppose la méridienne développée suivant une ligne droite, et les perpendiculaires sont figurées par d'autres lignes droites parallèles entre elles et perpendiculaires à la précédente. C'est ainsi qu'a été construite *la grande carte de France*, par Dominique Cassini. Tous les points en sont rapportés à la méridienne qui passe par la grande salle de l'Observatoire de Paris. Le point qui sert d'origine des coordonnées, et à partir duquel on commence à compter les arcs de cette méridienne, est au centre de cette salle. La construction de cette carte offre comme une sorte de réseau étendu sur la surface terrestre, et dont les fils servent de guides pour retrouver la position des lieux.

Dans la supposition de la terre sphérique, supposition bien suffisante pour l'objet qui nous occupe, on a vu que les perpendiculaires sont de grands cercles qui se coupent à 90° ou 100g du premier méridien; cependant, pour la construction de la carte, on les représente par des lignes droites parallèles. Les véritables rapports de configuration et d'étendue doivent donc se trouver altérés par cette circonstance. L'erreur est de peu d'importance à une petite distance de part et d'autre du méridien qui sert de point de départ, parce qu'alors la convergence des perpendiculaires n'est pas encore sensible. Mais elle augmente rapidement avec la surface que la carte embrasse. Déja, dans les extrémités orientales et occidentales de la grande carte de France, les dimensions des pays du nord au sud se trouvent ainsi sensiblement dilatées; ce qui altère leur

Digitized by Google

configuration. C'est un inconvénient de ce genre de construction, dont l'application se trouve ainsi limitée.

170. En la bornant à une étendue convenable, elle offre un avantage; c'est que les perpendiculaires à la méridienne étant de grands cercles, donnent immédiatement la plus courte distance des lieux à la méridienne. Cette propriété appartient essentiellement aux lignes géodésiques, et dérive de leur construction, telle que nous l'avons définie. Quelle que soit la figure de la terre, ces lignes sont les plus courtes que l'on puisse mener entre deux points donnés, et elles déterminent, par conséquent, la plus courte distance itinéraire de ces points sur le sphéroïde. Mais la démonstration de cette propriété suppose un calcul qui ne peut trouver place ici.

171. Les opérations du tracé sont bornées à des étendues très-petites, par rapport aux dimensions totales de la terre. Il est impossible de prolonger ces courbes à travers les mers, d'un continent à un autre. On y supplée par des observations astronomiques.

Pour connaître la situation d'un lieu sur la surface terrestre, il suffit de connaître le parallèle sur lequel il se trouve, et sa position sur ce parallèle. Tout se réduit donc à déterminer ces deux élémens.

Le parallèle se détermine par l'observation de la latitude ou de la distance à l'équateur. Nous avons donné plus haut les moyens de l'obtenir.

La position du lieu sur le parallèle, se trouve en calculant sa distance à un méridien connu. Pour cela, on en choisit un, à volonté, que l'on suppose fixe, et que l'on nomme *premier méridien*. Ce sera, par exemple, celui qui passe par Paris. Si l'on imagine plusieurs autres méridiens menés par les divers points d'un même parallèle, ils feront des angles plus ou moins grands avec le

Digitized by Google

premier. Chaque point sera donc distingué des autres par l'angle qui lui est propre et qui fixe sa position sur le parallèle. Cet angle se nomme la *longitude du lieu*. Sa mesure est l'arc de l'équateur compris entre les deux méridiens. La *longitude* est *orientale* ou *occidentale*, selon que le lieu est situé à l'orient où à l'occident du premier méridien.

Or, c'est une propriété générale que deux points de la terre qui diffèrent en longitude, comptent, au même instant, des heures différentes. Par exemple, si l'angle qui les sépare est la vingt-quatrième partie de la circonférence, ou quinze degrés sexagésimaux, lorsque le soleil sera arrivé au méridien le plus oriental, il sera encore éloigné de l'autre de 15° ou de la 24e. partie du jour. Les habitans de cette partie de la terre n'auront donc pas encore midi, mais onze heures du matin. Ils ne compteraient que dix heures si l'angle des deux méridiens était de 30°. En général, le retard est proportionnel à cet angle (*).

C'est ainsi que les matelots de Magellan, lorsqu'ils revinrent en Portugal, après avoir fait le tour de la terre, comptaient, à bord de leur vaisseau, un jour de moins que dans le port d'où ils étaient partis. En effet, tandis que le méridien du port restait fixe, ces navigateurs s'en étaient éloignés, en se dirigeant toujours vers l'occident, et en suivant, pour ainsi dire, le soleil. Ils avaient transporté, peu-à-peu, tout autour de la terre, le méridien de leur navire, d'après lequel il comptaient les jours. Ils devaient donc, à leur retour, se trouver en

(*) J'emploie encore ici la division ordinaire du jour en 24 heures. Il est évident que le raisonnement serait le même dans la division décimale.

Digitized by Google

retard d'une révolution entière du soleil, ou d'un jour entier. Le contraire arrive à ceux qui s'avancent vers l'orient, et qui vont, pour ainsi dire, au-devant du soleil.

Ainsi, en général, *les observateurs situés sous deux méridiens différens, comptent, au même instant, des heures différentes, et la différence des longitudes est égale à celle des heures converties en degrés de l'équateur.*

172. On parviendrait à connaître cette différence, si l'on pouvait avoir un signal instantané qui fût apperçu en même tems dans les deux lieux. La différence des heures, comptées à ce même moment, donnerait la différence des longitudes.

Les phénomènes astronomiques offrent beaucoup de ces apparitions subites propres à servir de signaux. Tels sont, par exemple, les éclipses de lune, de soleil, celles des étoiles par la lune, que l'on nomme *occultations d'étoiles*, et d'autres phénomènes du même genre, que nous ferons connaître par la suite.

On emploie aussi, pour le même objet, l'observation des distances de la lune aux étoiles, que l'on mesure avec des instrumens de réflexion, qui peuvent servir même à la mer, et dont nous parlerons plus loin. Le mouvement propre de la lune étant très-rapide, ses distances au soleil ou aux principales étoiles varient à chaque instant. L'observation exacte de cette distance, fixe donc et détermine l'instant physique où elle a été faite. Si, par exemple, on observe aujourd'hui en Amérique, à telle heure, telle minute, telle seconde, une distance de la lune au soleil ou à Rigel, et si l'on sait d'ailleurs, par la *connaissance des tems*, que cette distance aura lieu à telle heure, telle minute, telle seconde du méridien de Paris, cette observation sera aussi comme celle

Digitized by Google

d'un signal instantané, et la différence des tems donnera la différence des méridiens ou des longitudes. C'est pour cela que les distances de la lune au soleil et aux étoiles principales sont calculées, dans la Connaissance des tems, de six heures en six heures pour le méridien de Paris. Dans le *Nautical Almanach*, elles le sont pour le méridien de Greenwich. Nous reviendrons plus tard sur ce procédé, quand nous aurons déterminé les lois du mouvement de la lune, et nous verrons alors quel degré d'exactitude on en peut attendre : sa connaissance est sur-tout d'une importance extrême pour les marins.

173. On a cherché à atteindre le même but au moyen des instrumens nommés *garde-tems*, ou *montres marines*. Ce sont des montres construites avec un soin extrême, et munies de compensateurs, de manière à conserver toute leur régularité, malgré les variations de température et malgré les secousses inséparables d'un long voyage. On règle la montre au moment du départ, et si elle marque, par exemple, 0^h, $0'$, $0''$ lorsqu'une certaine étoile passe au méridien, quelque part qu'on la transporte ensuite, il en sera toujours de même en supposant sa marche exacte ; et lorsqu'elle marquera 0^h, $0'$, $0''$, on sera sûr que l'étoile dont il s'agit passe au premier méridien. Il suffira donc d'attendre que cette étoile passe au méridien du lieu où l'on se trouve, et de voir l'heure que l'horloge indique : ce sera la distance des deux méridiens exprimée en tems, et on en déduira aussitôt celle des longitudes.

On est obligé, dans cette estimation, d'avoir égard aux petits mouvemens particuliers que l'on a remarqués dans les étoiles, et qui font varier un peu l'heure de leur retour au méridien. Mais, dans l'état actuel de l'astronomie, ces mouvemens sont très-exactement connus, et il est facile d'y avoir égard. On emploie aussi, avec

Digitized by Google

des corrections analogues, les mouvemens du soleil et des planètes.

174. Pour énoncer le procédé de la manière la plus simple, nous avons supposé que l'on observait l'instant où l'astre passe au méridien. On le peut dans un observatoire fixe; mais cela serait impraticable à la mer, où l'on ne peut faire usage d'aucun instrument immobile, à cause du mouvement du vaisseau. Heureusement cette condition n'est pas du tout nécessaire. Car puisqu'à chaque instant la montre vous indique l'heure qu'il est au point d'où l'on est parti, tout consiste à déterminer l'heure qu'il est au même instant au point où l'on se trouve; et c'est ce qu'il est très-aisé de faire, même à la mer, en observant la hauteur du soleil, d'une étoile, ou d'une planète sur l'horison. En effet la latitude du vaisseau est connue par les hauteurs méridiennes du soleil ou des étoiles que l'on observe tous les jours et même plusieurs fois par jour, lorsque le ciel est serein. Ainsi on aura l'heure, comme dans l'article 129, par le calcul de l'angle horaire, d'après la hauteur observée (*).

Nous avons aussi supposé que la montre marine suivait exactement, malgré le transport, la marche qu'elle avait primitivement au lieu du départ. Cela est pres-

(*) Soit p la distance polaire de l'astre; Z sa distance zénithale, ou le complément de sa hauteur apparente, corrigée de la réfraction; D la distance du pôle au zénith ou le complément de la latitude; enfin, P l'angle horaire cherché. Les trois quantités p, D, Z étant connues par l'observation, on aura

$$\sin \tfrac{1}{2} P = \sqrt{\frac{\sin\left\{\frac{Z+p-D}{2}\right\} \sin\left\{\frac{Z+D-p}{2}\right\}}{\sin p \,.\, \sin D}}$$

Pour la démonstration de cette formule, *voyez* la pag. 105.

Digitized by Google

qu'impossible, à la rigueur, et quelque parfaits que ces instrumens puissent être, il serait très-imprudent de s'y confier aveuglément. Mais en observant des hauteurs du soleil ou des étoiles, toutes les fois que cela est possible, on finit par connaître, jour par jour, la marche de la montre, et par déterminer ses plus petites inégalités, auxquelles on a ensuite égard dans le calcul. Comme dans ces opérations faites à bord, l'observatoire marche avec l'observateur, on tient compte de son déplacement sur les observations que l'on compare, au moyen de divers procédés connus des marins (*).

Je ferai connaître plus tard, avec détail, l'extrême perfection que l'on a donnée à ces diverses méthodes, chronométriques ou astronomiques, ainsi que l'usage qu'on en fait pour trouver la longitude tant sur mer que sur terre. Mon dessein, dans ces commencemens, est seulement d'indiquer la nature des procédés.

175. En supposant la terre sphérique, les degrés de latitude sont sensiblement égaux entre eux: il n'en est pas de même des degrés de longitude, lorsqu'ils sont comptés sur des parallèles différens. Il est visible, en effet, que les parallèles diminuent de grandeur en approchant du pôle, d'où il suit que les parties aliquotes de ces cercles, comme sont les degrés, diminuent dans le même rapport. Ainsi pour évaluer en degrés de l'équateur terrestre un certain nombre de degrés, minutes et secondes d'un parallèle connu, la terre étant supposée

(*) Ces procédés ont été discutés avec beaucoup de détail et d'exactitude dans le voyage de D'Entrecasteaux; publié et rédigé par M. De Rossel, l'un des officiers qui ont pris part à cette expédition. On en trouvera l'exposé dans un appendice à l'usage des marins, dont cet excellent observateur a bien voulu enrichir mon ouvrage.

Digitized by Google

sphérique, il faut multiplier ce nombre par le rapport des rayons du parallèle et de l'équateur, c'est-à-dire par le cosinus de la latitude. Car cette opération est la même que celle de l'article 120, pour la mesure des degrés des parallèles célestes ; et dans la figure 27, où C est le centre de la terre supposée sphérique, CE le rayon de l'équateur, OQ le rayon du parallèle, et EOZ ou ECO la latitude, le rapport $\frac{OQ}{CE}$ est le cosinus de l'angle OCE.

Lorsque l'on ne veut plus supposer la terre sphérique, la valeur des degrés de longitude à diverses latitudes dépend de sa figure.

On trouvera à la fin de ce livre une table qui contient les degrés de longitude, calculés en mètres, pour les différens parallèles, depuis 0° jusqu'à 90°, en adoptant pour la figure de la terre, celle de l'ellipsoïde de révolution dont nous avons déterminé les axes dans le chapitre précédent.

176. Avec ces données on peut calculer la distance itinéraire de deux points quelconques de la terre, dont on connaît la longitude et la latitude, le calcul est des plus faciles, si l'on suppose la terre sphérique. En effet, soient A et B ces deux lieux *fig.* 34. Leur plus courte distance sera l'arc de grand cercle AB, qui les joint. Soient AP, BP, leurs méridiens qui se coupent au pôle P; l'angle de ces plans sera connu, c'est la différence des longitudes. La distance angulaire des deux lieux au pôle P sera aussi connue, c'est le complément des latitudes AE, BE'. Ainsi dans le triangle sphérique ABP, on connaîtra les deux côtés AB, BP, et l'angle P. On pourra donc calculer toutes les autres parties de ce triangle par les règles de la trigonométrie sphérique. On aura ainsi la longueur de l'arc AB, exprimé en degrés, et en prenant chaque degré

Digitized by Google

sexagésimal sur le pied de 20 lieues marines, on aura la distance des deux points exprimée en lieues. On l'aurait de même en myriamètres en calculant l'arc en grades, et le multipliant par 100000 comme dans la page 162.

On peut aussi calculer la distance de deux lieux sur le sphéroïde elliptique ; mais ce calcul ne saurait trouver place ici, et le résultat précédent suffira presque toujours.

177. Connaissant les longitudes et les latitudes d'un grand nombre de points de la surface terrestre, on peut en les portant sur un globe, figurer les contours des divers pays, et en donner la représentation : c'est ce que l'on nomme des *globes terrestres*.

On peut aussi dessiner ces configurations sur un plan, et placer dans ce dessin les différens lieux d'après leur longitude et leur latitude ; on forme ainsi les *cartes géographiques*, dont il y a un grand nombre d'espèces.

Les marins font un grand usage d'une sorte de cartes que l'on nomme *cartes réduites*, et qui sont fondées sur un système de projection peu différent de celle de Cassini. Dans ces cartes, imaginées par Mercator, les méridiens sont aussi représentés par des lignes droites parallèles entre elles, et les parallèles le sont par d'autres lignes droites perpendiculaires aux précédentes. Mais comme la convergence des méridiens, en approchant des pôles, se trouve ainsi négligée, il en résulte que l'image des divers pays est dilatée de l'est à l'ouest, et d'autant plus que ces pays s'éloignent davantage de l'équateur, ou en général du parallèle que l'on a choisi pour le milieu de la carte. Pour corriger cet inconvénient, Mercator imagina de dilater aussi les degrés de latitude dans la même proportion. De cette manière, les rapports de configuration et d'étendue se trouvent conservés pour les parties de la carte qui sont situées à-peu-près sur le

Digitized by Google

même parallèle, quoique ces rapports soient altérés quand on compare des parallèles différens. Mais la première condition suffit aux navigateurs qui n'emploient les cartes réduites que comme des instrumens destinés à résoudre graphiquement les principales opérations du pilotage.

On a encore imaginé d'autres espèces de cartes fondées sur des systêmes de projection différens. Mais la terre étant une surface arrondie, on sent que les *projections par développement* ne sauraient être rigoureuses, et qu'elles ne peuvent représenter avec exactitude que des espaces assez petits pour que la courbure de la terre y soit insensible. Cet inconvénient a fait imaginer les *projections perspectives*, qui ne sont en effet que des dessins en perspective de la surface terrestre et des diverses régions qui la couvrent. Les cartes construites de cette manière diffèrent les unes des autres, selon la position du point de vue où l'on suppose l'observateur, et du tableau sur lequel on suppose la perspective projetée. Par exemple, si le tableau est un plan mené par le centre de la sphère, et si on place le point de vue sur la surface même de cette sphère à l'extrémité du rayon perpendiculaire au plan du tableau, l'hémisphère concave opposé, mis en perspective, formera l'espèce de carte que l'on nomme *mappemonde*. Il est facile de démontrer que, dans ce systême de construction, tous les cercles tracés sur le globe ont pour perspective d'autres cercles, ce qui rend le tracé des mappemondes très-facile. Mais si en général le tracé des cartes est utile pour figurer et rappeler à la mémoire la forme des régions et la position relative des lieux qu'elles comprennent, ce sont les observations astronomiques seules qui peuvent fixer ces élémens avec précision.

En jetant les yeux sur des cartes géographiques construites chez les diverses nations, on voit que chacune

Digitized by Google

d'elles compte ses longitudes à partir d'un méridien différent. Certainement si l'utilité réglait les usages, celui-ci n'aurait pas dû s'introduire; car rien n'est plus incommode et plus superflu que de rendre ainsi variable et arbitraire un élément qui devrait être commun à tous les peuples civilisés. Mais l'amour-propre, qui existe pour les nations comme pour les individus, s'est opposé jusqu'ici à ce que l'on soit généralement d'accord sur ce point. Pendant longtems on s'était assez accordé à prendre pour premier méridien celui de l'Ile-de-Fer, la plus occidentale des Canaries. Mais cet usage a perdu de sa généralité. Maintenant chaque peuple compte ses longitudes à partir du méridien qui passe par le principal observatoire de sa nation. Les Anglais comptent de Greenwich, les Français de Paris. On a proposé de prendre pour premier méridien celui qui passe par le sommet du Mont-Blanc. Ce point, le plus élevé de l'Europe, est en effet très-remarquable, et sous ce rapport il appartient également à tous les peuples qui habitent cette belle partie de la terre. Mais si l'on craignait encore en cela jusqu'à l'apparence de l'individualité, on pourrait prendre pour premier méridien celui de la petite île de Formentera, située à l'extrémité de la méridienne, et liée par cette opération aux deux principaux observatoires de l'Europe, celui de Paris et de Londres. Le choix de cette petite île presque déserte, et qui n'est qu'un rocher isolé, n'aurait rien qui pût blesser l'amour-propre national d'aucun peuple (*).

(*) Pour avoir plus de détails sur la construction des cartes géographiques, on peut consulter un mémoire de M. Lacroix, dans le 1er. volume du Mémorial topographique, publié par le Dépôt de la guerre. Quant à la théorie mathématique, voyez les Recherches insérées sur cet objet par M. Lagrange dans les Mémoires de Berlin.

Digitized by Google

CHAPITRE XVI.

Examen des conséquences physiques qui résultent de l'universalité du Mouvement diurne. Il ne s'ensuit pas nécessairement que ce mouvement doive être attribué aux Astres plutôt qu'à la Terre.

178. Lorsqu'on a établi un fait physique sur des preuves incontestables, il faut en examiner soigneusement les conséquences, et distinguer celles qui sont nécessaires de celles qui sont seulement possibles. Appliquons cette sage méthode aux phénomènes célestes que nous venons de découvrir.

Pour raisonner avec quelque certitude sur les mouvemens célestes, d'après les apparences que nous observons, il fallait connaître à-peu-près notre position dans l'univers et les dimensions relatives de la terre que nous habitons. Nous voyons maintenant, de la manière la plus évidente, que cette terre, qui nous paraît si vaste, n'est dans l'espace que comme un globule à-peu-près sphérique.

Nous avons découvert ensuite, par les observations combinées des hauteurs et des passages, que tout le système des astres semble tourner circulairement et uniformément autour d'un axe qui passe par l'intérieur de la terre, suivant une direction que nous avons déterminée. Ce mouvement s'exécute sans aucun trouble; les distances

Digitized by Google

angulaires des étoiles restent invariablement, ou presque invariablement les mêmes. Quelques astres seulement, qui sont le soleil, la lune, les planètes et les comètes, font exception à cette dernière loi : leurs distances respectives varient, et leurs diamètres apparens éprouvent des changemens considérables, qui, grossis par le télescope, et mesurés par le micromètre, deviennent sensibles même après de courts intervalles de tems. A cela près, ces astres sont assujétis, comme tous les autres, aux lois générales du mouvement diurne.

179. Voilà les faits tels que les observations les établissent : il s'agit d'en déduire les conséquences. D'abord le grossissement du disque par le télescope indique que la lune, le soleil, les planètes et les comètes sont incomparablement plus près de nous que les étoiles. De plus, les variations de leurs diamètres apparens prouvent que ces astres ne sont pas toujours à la même distance de la terre ; car c'est une règle d'optique qu'un même objet de dimension constante paraît plus grand lorsqu'il est vu de plus près, et plus petit quand il est vu de plus loin (*).

(*) Les observations apprennent que les planètes sont des corps arrondis comme la terre, et comme elle à fort peu près sphériques. Si, par l'œil de l'observateur et par le centre de l'astre, on mène un plan, ce plan coupera la surface de l'astre, suivant une courbe rentrante *ADBD'*, *fig.* 35, et si du point *O*, où est situé l'observateur, on mène, à la courbe *ADBD'*, deux tangentes, qui figureront deux rayons visuels menés aux points opposés du disque, l'angle *DOD'* sera *le diamètre apparent de l'astre.*

Si la planète est une sphère, ou si elle forme une surface de révolution autour de l'axe *AO*, l'angle visuel *DOD'* sera le même dans quelque sens qu'on l'observe, et tous les diamètres apparens observés sur divers diamètres du disque, seront égaux entre eux.

Digitized by Google

Il est vrai qu'on pourrait expliquer ces variations par des changemens réels de forme que ces astres éprouveraient. Mais comme les observations prouvent qu'ils sont opaques, et par conséquent solides, cette explication n'aurait pas la moindre vraisemblance, et il est inutile de nous y arrêter. Au contraire, pour les étoiles, non-seulement les diamètres apparens sont insensibles, mais leurs distances angulaires sont invariables, ou presque invariables, même après de longs intervalles de tems. Aucun point de la sphère des fixes ne s'approche donc ou ne s'éloigne de nous dans cet intervalle, d'une quantité sensible. Ces

---

Au contraire, si ces diamètres sont inégaux, on sera sûr que la ligne de tangence du cône formé par les rayons visuels, n'est point circulaire, ce qui indiquera un applatissement. Si l'on suppose la section $ADBD'$ circulaire, le rayon visuel OD sera perpendiculaire à l'extrémité du rayon CD. Soit celui-ci $= R$, la distance $CO = D$, l'angle visuel DOC, ou le demi-diamètre apparent $= \alpha$, le triangle COD rectangle en D, donnera évidemment

$$\sin \alpha = \frac{R}{D}.$$

Les dimensions de l'astre étant invariables, R est constant, et les *sinus de deux diamètres apparens d'un même astre sont réciproques* à sa distance; par conséquent, l'angle visuel diminue quand l'astre s'éloigne, et augmente quand il s'approche.

Si l'objet est petit ou fort éloigné, en sorte que l'angle visuel α soit un très-petit angle, $\sin \alpha$ sera aussi une quantité très-petite, et on pourra, sans erreur sensible, le supposer proportionnel à l'angle α, d'où résulte ce théorême d'optique.

Les angles visuels sous lesquels on apperçoit un même objet très-éloigné, sont réciproques à sa distance;

Ou, ce qui revient au même, *les distances d'un même objet vu sous de petits angles, sont réciproques à ses diamètres apparens.*

Digitized by Google

différences nous conduisent à regarder le soleil, la lune, les planètes, les comètes et la terre, comme une sorte de grouppe particulier parmi les autres corps célestes : c'est ce que l'on nomme notre *système planétaire*.

180. Mais ce repos des étoiles pourrait bien n'être qu'une apparence ; car, à cause de leur immense éloignement, il faut qu'elles parcourent de très-grands intervalles avant que nous puissions nous appercevoir qu'elles ont change de place. C'est donc au tems à nous éclairer sur cet objet. Malheureusement les observations anciennes ne sont pas assez précises pour que nous puissions en faire usage. Mais déja, par la discussion des observations modernes, quelques astronomes ont essayé de prouver que les distances angulaires de plusieurs étoiles ont augmenté sensiblement, dans une certaine partie du ciel située vers la *constellation d'Hercule*, et ont diminué dans la partie opposée. Il est donc probable que les premières sont maintenant plus près de nous, et les autres plus loin. Cet écartement n'est encore sensible que dans un petit nombre d'étoiles; mais on peut penser que si les autres paraissent immobiles, c'est parce qu'elles sont plus éloignées; car ces mouvemens, s'ils existent, doivent se manifester d'abord dans les étoiles qui sont les moins éloignées de nous (*).

181. Ces phénomènes prouvent incontestablement que la distance de la terre aux divers corps célestes ne reste pas toujours la même ; mais ils ne nous apprennent pas si le soleil, les planètes et les étoiles sont réellement en mouvement, la terre étant immobile, ou si la terre en

(*) *Voy.*, à la fin du livre, la note relative au mouvement du système planétaire.

Digitized by Google

mouvement s'approche et s'éloigne de ces astres. Quelque singulière que cette question paraisse, il n'y a rien dans les observations qui puisse la décider. Lorsque le soleil nous semble s'approcher de la terre, un observateur placé dans le soleil devrait, comme nous, se juger en repos et croire que la terre s'approche de lui. Il en est de même du mouvement diurne des astres : nous ne pouvons pas en conclure qu'ils tournent réellement, car les apparences seraient absolument les mêmes si c'était la terre qui tournât. Entraînés avec les corps qui nous environnent, avec les mers et l'atmosphère, nous nous croirions immobiles, et lorsque la terre, par sa rotation, nous présenterait successivement aux divers points du ciel, nous imaginerions que c'est le ciel qui tourne réellement autour de nous.

182. On a des exemples fréquens de ces illusions. Souvent nous attribuons notre propre mouvement aux objets extérieurs. Un voyageur tranquille au fond d'une voiture qui l'emporte avec rapidité, voit les arbres qui bordent la route courir vers lui à droite et à gauche ; une autre personne placée dans la même voiture, mais emportée en arrière, croit les voir s'enfuir. Les yeux s'habituent tellement à cette illusion qu'elle ne cesse pas aussitôt que la voiture s'arrête, ou plutôt elle en produit une contraire, car alors en voyant les objets immobiles, on se croit pendant quelques instans transporté dans le sens opposé. Dans d'autres cas, nous faisons abstraction du mouvement réel des corps. Un cavalier qui court à toute bride lance des boules au-dessus de sa tête, et les retient dans sa main : elles lui semblent tomber verticalement ; cependant cela ne saurait être, puisqu'il a changé de place pendant leur chûte. Elles décrivent réellement des courbes très-composées, et c'est ainsi que les voit un spectateur immobile. Enfin, il y a des circonstances où

Digitized by Google

le mouvement nous semble du repos, et le repos du mouvement. Regardez le ciel le soir lorsqu'il est en partie couvert de nuages que le vent pousse avec rapidité ; si la lune ou quelque étoile paraît entre eux, elle semble se mouvoir rapidement en sens contraire : il est très-difficile et comme impossible de résister à cette illusion.

183. En général, plusieurs causes contribuent à nous faire mal juger des mouvemens qui se font hors de nous. D'abord, nous croyons nos yeux en repos, lorsque le mouvement qui nous emporte n'est pas un effet actuel de notre volonté, ou un résultat immédiat de l'action de nos organes. L'illusion est d'autant plus forte que le mouvement est plus rapide ; sur-tout, si nous ne sommes avertis par aucune secousse, comme il arrive dans une voiture qui roule sur la terre. Secondement, nous sommes portés, par l'habitude, à faire abstraction des mouvemens auxquels nous participons, parce qu'ils ne nous empêchent pas de saisir, comme à l'ordinaire, les objets qui se déplacent avec nous : c'est le cas du cavalier. Enfin, parmi les objets éloignés, ce sont toujours les plus petits que nous croyons en mouvement. Ceux qui nous semblent plus grands ou plus difficiles à mouvoir, nous les jugeons immobiles. Ainsi, la lune et les étoiles nous paraissant très-petites, par rapport à de vastes amas de nuages qui embrassent l'horison, ces astres nous semblent en mouvement au milieu d'eux. Nous sommes encore trompés en cela par l'habitude, qui nous montre les petits objets, comme les oiseaux, en mouvement parmi les grands corps, tels que les arbres et les montagnes.

Mais ces faux jugemens se redressent avec facilité lorsqu'on a une idée exacte du mouvement ; et s'il n'est pas toujours possible de se défendre des illusions qui

Digitized by Google

les occasionnent, on peut du moins toujours en reconnaître l'erreur et en prévenir les conséquences.

184. Le mouvement n'a d'effet sensible que relativement aux choses qui en sont privées, mais pour celles qui y participent également, il n'est rien et ne produit aucun effet. Voilà le principe général dont il faut bien se pénétrer. Ainsi des marchandises embarquées dans un navire, et parties pour un grand voyage, sont réellement en mouvement pendant toute la traversée, en tant qu'elles passent par plusieurs lieux dont la position ne change point avec le navire, et qui ne se meuvent pas avec lui. Mais si l'on considère les balles et les caisses dont le navire est chargé, par rapport au navire lui-même, ce mouvement de transport est comme s'il n'existait pas. Il n'altère point les positions respectives de ces objets, parce que tous y participent, et y participent également. Mais si une des caisses se déplace par rapport aux autres, ne fût-ce que d'un millimètre, ce millimètre sera, relativement à elles et au navire, un mouvement plus grand que tout le voyage fait ensemble.

185. Concluons de là que quelque mouvement qu'ait réellement la terre, si tous les objets placés à sa surface y participent, si l'atmosphère le partage, et si nous le partageons nous-mêmes, nous ne pourrons nullement le sentir, et il sera pour nous comme s'il n'existoit pas. Mais d'un autre côté, il est également nécessaire que ce mouvement paraisse général et commun à tous les objets visibles, qui étant hors de la terre, et de l'atmosphère qui marche avec elle sont étrangers à son mouvement. Ainsi, la véritable méthode par laquelle nous pourrons découvrir si l'on peut attribuer un mouvement à la terre, et quel mouvement on peut lui attribuer, c'est de con-

Digitized by Google

sidérer et d'observer si, dans les corps séparés de la terre et de l'atmosphère, comme le sont les astres, on découvre un mouvement commun qui convienne également à tous. Car, par exemple, un mouvement qui s'observerait seulement pour la lune, et qui n'aurait lieu ni pour les planètes, ni pour les étoiles, ne pourrait être attribué qu'à la lune et non pas à la terre. Il n'y a rien de plus général à cet égard que le mouvement diurne qui entraîne en même tems tous les astres d'orient en occident. Ainsi, d'après les seules apparences, ce mouvement peut, avec autant de raison, être attribué à la terre seule, en sens contraire, qu'au reste du monde, la terre exceptée.

On en peut dire autant des autres mouvemens très-petits, mais pourtant généraux, dont nous avons reconnu ou annoncé l'existence. Ces mouvemens pourraient bien ne pas se faire réellement dans les étoiles, car les apparences seraient absolument les mêmes, si l'équateur de la terre et l'axe qui lui est perpendiculaire restant fixes sur sa surface se déplaçaient peu-à-peu dans le ciel. La hauteur du pôle sur l'horison de chaque lieu serait toujours la même; tous les objets terrestres conserveraient leurs positions respectives, et nous nous croirions encore immobiles au milieu d'eux. Les astres nous paraîtraient donc faire, dans les cieux, tous les mouvemens que la terre ferait en sens contraire. Les seules apparences n'offrent absolument rien par quoi l'on puisse décider laquelle de ces deux hypothèses est la véritable.

Dans notre incertitude, il ne nous reste qu'un parti à suivre, c'est d'étudier avec soin les apparences des mouvemens célestes, et de voir laquelle des deux hypothèses les explique avec plus de simplicité.

Digitized by Google

CHAPITRE XVII.

Conséquences physiques de l'applatissement de la Terre. Longueur du Pendule à secondes sur les différens parallèles.

186. QUOIQUE l'applatissement de la terre soit une quantité très-petite, sa connaissance est extrêmement importante à cause des conséquences qu'elle entraîne.

Et d'abord, on voit que la pesanteur, toujours perpendiculaire à la surface et dirigée suivant la verticale, ne tend plus au centre de la terre. Ses directions s'en écartent d'une quantité très-petite, du même ordre que l'applatissement. Il y a donc une liaison, un rapport nécessaire, entre la forme de la terre et la pesanteur. En suivant cette liaison, nous parviendrons peut-être à découvrir d'où vient cet applatissement lui-même, et à quelle cause probable on peut l'attribuer.

187. En considérant la pesanteur d'une manière générale, nous voyons qu'elle agit sur tous les corps terrestres comme par une sorte d'*attraction* qui les sollicite vers la terre, et tend à les y précipiter. Cette force subsiste au sommet des montagnes, et dans les cavités les plus profondes. On peut donc considérer la terre entière comme composée d'une infinité de particules matérielles réunies et concentrées par la pesanteur.

Si ces particules n'ont pas toujours formé une masse solide, si elles se sont trouvées autrefois dans un état de mollesse qui donnait plus de liberté à leurs mouvemens,

Digitized by Google

elles ont dû s'arranger d'elles-mêmes, comme l'exigeait la nature des forces dont elles étaient animées; et en les supposant sollicitées par la seule pesanteur, elles devaient se réunir en une masse sphérique, comme font les gouttes d'eau et de mercure. Or, un grand nombre de faits d'histoire naturelle atteste que cet état a réellement existé, et que la terre a été primitivement fluide. Mais puisqu'elle n'a pas pris la forme sphérique, il faut en conclure que quelque autre cause agissait aussi sur ses particules, et contribuait à leur arrangement. Cela devient facile à expliquer, si nous supposons que la terre tourne journellement sur elle-même; car alors cette cause qui a renflé l'équateur et applati les pôles, est sans doute *la force centrifuge* due au mouvement de rotation.

On conçoit en effet que, si la terre tourne, ses diverses parties font effort pour s'éloigner de l'axe de rotation. C'est ainsi qu'une pierre tournée rapidement dans une fronde, tend la corde qui la retient, et la rompt si elle est trop faible. Cette *force centrifuge* s'accroît avec la vîtesse; elle est la plus grande possible pour les points de l'équateur qui décrivent le plus grand cercle. Elle est nulle aux pôles qui sont immobiles, et elle décroît, par des dégrés insensibles, d'une de ces limites à l'autre. La terre, par l'action de cette force, devait donc s'applatir aux pôles et se gonfler à l'équateur.

Considérons deux colonnes fluides communiquant entre elles, et dont l'une soit dirigée suivant l'axe qui passe par les pôles, l'autre, dans le plan de l'équateur; ces colonnes s'étendant du centre à la surface de la terre. Les particules matérielles qui se trouvent dans la colonne de l'équateur, sont favorisées par la force centrifuge, qui tend à les éloigner de l'axe de rotation, et

Digitized by Google

leur pesanteur en est un peu diminuée. La colonne des pôles, au contraire n'a aucune force centrifuge : elle obéit entièrement à la pesanteur qui l'attire vers le centre de la masse. Elle a donc réellement plus de poids que l'autre, et il ne peut y avoir d'équilibre entre elles, à moins que la colonne de l'équateur ne s'alonge aux dépens de celle des pôles, de sorte que la diminution de la pesanteur se trouve compensée par l'accroissement de la masse. Le même effet doit se produire dans toutes les colonnes parallèles à l'équateur, mais il devient de plus en plus faible à mesure que leur force centrifuge est moindre ; et ces alongemens gradués produisent sur le sphéroïde un renflement général qui diminue insensiblement de l'équateur aux pôles.

Ainsi, en supposant que la terre tourne, son applatissement serait une conséquence nécessaire de sa rotation, et par conséquent, puisque cet applatissement existe, il indique cette rotation avec beaucoup de vraisemblance.

188. L'analogie la plus frappante vient encore confirmer ces soupçons. Parmi les planètes, il en est plusieurs dont le disque ovale offre des signes non équivoques d'un applatissement : tels sont, par exemple, Jupiter et Saturne. En les observant avec soin, on a découvert, à la surface de leur disque, *des taches* dont le déplacement régulier et le retour périodique décèlent le mouvement de rotation de la planète autour de son plus petit diamètre. Pourquoi la terre, semblable à ces planètes, par sa rondeur et par son applatissement, n'aurait-elle pas aussi comme elles un mouvement de rotation, autour de son petit axe ? Loin que ce phénomène doive nous paraître extraordinaire, il serait au contraire fort étonnant qu'il n'eût pas lieu.

Digitized by Google

189. En suivant cette induction, elle nous mène à une autre conséquence non moins importante. Si la terre était sphérique et homogène, l'attraction exercée par sa masse sur les divers points de sa surface, ou ce qui revient au même, la pesanteur qui sollicite les corps vers son centre serait la même partout. Mais la forme elliptique détruit cette égalité, et l'attraction doit augmenter en allant de l'équateur au pôle, proportionnellement au carré du sinus de la latitude; ce que l'on prouve par des calculs que nous ne saurions rapporter ici. Maintenant si la terre tourne, autour de son petit axe, une autre cause se combine avec la précédente. L'action de la force centrifuge, tend à diminuer le résultat de l'attraction. Mais cette diminution varie aussi de l'équateur au pôle, parce qu'en s'approchant du pôle, la force centrifuge toujours perpendiculaire à l'axe de rotation, devient de plus en plus oblique sur le rayon terrestre, et par conséquent sur la direction de la pesanteur. Il est même facile de prouver par les principes de la mécanique, que cette diminution est aussi proportionnelle au carré du sinus de la latitude, comme celle de l'attraction. Ainsi, par l'effet de ces deux causes, la pesanteur absolue que nous observons; c'est-à-dire l'excès de l'attraction, sur la force centrifuge décomposée suivant le rayon terrestre, doit varier de l'équateur au pôle suivant la même loi. Par une conséquence nécessaire, en allant de l'équateur vers les pôles, la chûte des corps doit s'accélérer proportionnellement au carré du sinus de la latitude, et le même corps doit devenir plus pesant suivant ce rapport.

Les oscillations du pendule offrent un moyen simple de vérifier ce fait. Si la chûte des corps s'accélère, les oscillations doivent se faire plus rapidement, et l'on peut calculer, d'après leur vîtesse, l'accroissement de la

Digitized by Google

pesanteur. Car on démontre, en mécanique, que les longueurs des pendules synchrônes sont proportionnelles aux intensités de cette force. Or, en transportant un même pendule en différens lieux de la terre, on a trouvé qu'en effet il va plus vîte à mesure que l'on s'éloigne de l'équateur; et la loi de cette accélération que l'on a déterminée avec beaucoup d'exactitude, est en effet proportionnelle au carré du sinus du la latitude, comme l'exigerait la rotation du globe terrestre.

190. Pour mettre ce fait en évidence, il suffira de rapporter les longueurs du pendule à secondes, telles qu'on les a observées à différentes latitudes. Voici ces longueurs; celle qui a lieu pour Paris étant prise pour unité.

LATITUDES.	LONGUEURS DU PENDULE.
0°,00	0,99669
20°,00	0,99745
48°,44	0,99950
54°,26	1,00000
74°,22	1,00137

On voit, par ces résultats, qu'en s'éloignant de l'équateur, on est obligé de donner plus de longueur au pendule pour avoir des oscillations de même durée. Il s'ensuit nécessairement que la pesanteur augmente quand on s'avance dans cette direction; car puisqu'on

Digitized by Google

alonge le pendule, si elle restait la même, les oscillations se ralentiraient. De plus les variations de ces longueurs sont très-bien représentées par un accroissement proportionnel au carré du sinus de la latitude, comme on peut aisément le vérifier sur les nombres rapportés dans le tableau précédent. L'augmentation de la pesanteur, en allant de l'équateur au pôle, est donc un nouvel indice de la rotation de la terre. De plus on prouve par le calcul, que les longueurs du pendule à secondes, en différens lieux, sont proportionnelles aux pesanteurs qui l'animent. D'après cela, les rapports exprimés dans le tableau ci-dessus, doivent représenter aussi les poids successifs d'une même masse que l'on transporterait successivement à des latitudes diverses.

191. Nous ne donnons ici que les rapports des longueurs absolues du pendule à différentes latitudes. Pour connaître leurs valeurs absolues, il faudrait donner celle d'une des mesures précédentes, par exemple, celle du pendule à Paris. Mais auparavant, il faut décider de quelle division du tems on veut faire usage, puisque la longueur du pendule à secondes sera nécessairement différente suivant l'espèce de *seconde* que l'on emploiera. Pour nous qui, jusqu'à présent, ne connaissons de mesure du tems que celle qui est donnée par les étoiles, nous n'avons besoin de connaître que le *pendule sydéral*, c'est-à-dire, celui qui ferait une oscillation pendant une seconde sexagésimale ou décimale de tems sydéral; or, des expériences très-exactes, faites à l'Observatoire de Paris, et vérifiées avec beaucoup de soin, ont donné (*) :

(*) Relativement au détail de ces expériences, *voyez* la note 2 à la fin du livre.

Digitized by Google

Longueur du pendule sydéral, à secondes sexagésimales . . . . . $0^m,9884327$

Longueur du pendule sydéral, à secondes décimales 0, 7378611

Avec ces valeurs absolues et les rapports des longueurs que nous avons donnés dans le tableau précédent, on aura tout de suite les longueurs du pendule sydéral pour les latitudes indiquées dans ce tableau. Et on les obtiendrait également pour un autre parallèle quelconque en les calculant d'après la loi de variation que nous avons reconnue exister entre elles ; c'est-à-dire, proportionnellement au carré du sinus de la latitude. Enfin si l'on voulait les obtenir pour telle autre division du tems que l'on voudrait imaginer, on les trouverait facilement d'après la règle suivante. Les longueurs des pendules simples sont entre elles comme les carrés des tems qui expriment les durées de leurs oscillations.

Les astronomes sont dans l'usage de régler tous leurs calculs sur une période de tems déduite de la marche du soleil, et que l'on nomme le jour moyen. Nous verrons plus loin comment on détermine la durée de cette période, et par quelles conditions elle est donnée. Mais nous pouvons, dès à présent, la définir avec exactitude, en disant que le jour moyen est plus long que le jour sydéral de 235 secondes sexagésimales moyennes et $\frac{91}{100}$, en sorte que $86400''$ sydérales sexagésimales égalent, en durée, $86164'',09$ sexagésimales moyennes. D'après cela, si le jour moyen est représenté par $86400''$ sexagésimales moyennes, le jour sydéral le sera par $86164'',0$. Ainsi en multipliant le pendule sydéral sexagésimal ou $0^m,9884327$ par $\left\{\frac{86400}{86164,09}\right\}^2$, rapport du carré des

tems, on aura la longueur du pendule à secondes moyennes sexagésimales pour Paris, laquelle sera $0^m,9938526$, ou en mesures anciennes $3^{pds}.8^l,571$, ou en lignes 440,571.

Si l'on voulait la longueur du pendule à secondes décimales moyennes, on l'obtiendrait par un calcul tout semblable en multipliant la longueur du pendule sydéral décimal, ou $0^m,7378611$, par $\left\{\frac{86400}{86164,09}\right\}^2$; c'est-à-dire par le carré du rapport du jour moyen au jour sydéral, on aura ainsi $0^m,7419070$ pour la longueur du pendule moyen et décimal à Paris (*).

Les valeurs précédentes sont relatives au niveau de la mer. A mesure que l'on s'élève au-dessus de cette surface, il faut racourcir le pendule pour qu'il fasse le même nombre d'oscillations, dans le même tems. Bouguer a fait sur cet objet, au Pérou, un grand nombre d'expé-

---

(*) En général, soit L la latitude, λ la longueur absolue du pendule décimal, qui ferait 100000 oscillations dans un jour moyen, on aura la valeur de λ en parties du mètre, par cette formule conclue d'un très-grand nombre d'observations,

$$\lambda = 0,7395776 + 0,004110 \,.\, \sin^2 L.$$

Le premier terme est la longueur du pendule à l'équateur; si l'on substitue au lieu de $\sin^2 L$ sa valeur $\frac{1 - \cos 2L}{2}$, la formule deviendra

$$\lambda = 0,7416326 - 0,002055 \,.\, \cos 2L,$$

ce qui est analogue avec la formule des degrés, donnée plus haut. Ici, le premier terme est la longueur du pendule moyen décimal à la latitude de 50 grades; de même que dans l'endroit cité, le premier terme était le degré moyen; mais l'applatissement indiqué par le pendule est $\frac{1}{310}$, et non pas $\frac{1}{304}$.

Digitized by Google

riences. En prenant pour unité la longueur du pendule à secondes à l'équateur, et au niveau de la mer, il a trouvé qu'à Quito, à la hauteur de 2857 mètres, cette longueur était 0,999249; c'est-à-dire, moindre de près de $\frac{8}{10000}$. Sur le Pichincha, à 4744 mètres de hauteur, cette longueur était encore moindre. Elle se trouvait réduite à 0,998816. La pesanteur, toujours proportionnelle à la longueur du pendule, se trouvait donc aussi réduite dans le même rapport. Ainsi la pesanteur diminue à mesure que l'on s'éloigne de la surface de la terre, et si l'on en juge par ces différences, déja sensibles à une distance si petite, il est bien probable que la même force s'étendrait ainsi indéfiniment, en s'affaiblissant dans l'espace.

192. On est parvenu, par la théorie, à découvrir les rapports qui existent entre l'applatissement de la terre et les variations de la longueur du pendule. La valeur de l'applatissement ainsi calculée s'est trouvée égale à $\frac{1}{320}$, c'est-à-dire, très-peu différente de celle qui résulte de la mesure des degrés. Et comme d'après la même théorie, l'alongement du pendule de l'équateur au pôle doit être à fort peu près proportionnel au carré du sinus de la latitude, on voit que cet alongement suit encore la même loi que l'accroissement des degrés.

193. La longueur du pendule à secondes étant exprimée en parties du mètre, la connaissance de ce résultat suffirait pour retrouver le MÈTRE, base de toutes nos mesures, si tous les étalons qui fixent sa valeur exacte venaient à se perdre dans la suite des tems. En effet, si l'on se rappelait seulement que la longueur du pendule sydéral à secondes sexagésimales, est à Paris de $0,^{m}9884327$, en observant exactement cette longueur par l'expérience, et la divisant par 0,9884327, le MÈTRE

Digitized by Google

serait aussitôt retrouvé. Toute autre longueur du pendule sexagésimale ou décimale, sydérale ou moyenne, observée dans une latitude connue serviroit également. Voilà l'avantage que l'on a eu en prenant pour base du système métrique des données fixées par la nature. C'est un avantage que n'avaient point les mesures arbitraires, dont les anciens se sont servis faute d'en savoir déterminer de plus exactes. Aussi les étalons de ces mesures s'étant perdus par l'effet des révolutions des peuples, leur valeur s'est perdue également pour toujours, et les évaluations auxquelles elles ont servi de base ne peuvent plus servir que de sujet aux recherches et aux conjectures des érudits.

194. La rotation de la terre devient encore sensible dans un autre phénomène très-remarquable; c'est la déviation des corps qui tombent d'une grande hauteur. Pour concevoir ce phénomène, imaginons un corps pesant, placé à une grande distance de la surface terrestre, par exemple, au sommet d'une haute tour. Si la terre est immobile, le corps tombera au pied de la tour, suivant la verticale; mais si la terre tourne sur elle-même, le corps qui participe à ce mouvement, aura à l'instant de départ, une vitesse de rotation plus grande que le bas de la tour, parce qu'il est plus éloigné de l'axe. Ainsi, lorsqu'il tombera avec le mouvement composé de cette vitesse horisontale et de la pesanteur, il devra devancer un peu la verticale dans le sens du mouvement de la terre; et par conséquent, après sa chûte, il sera un peu écarté de la tour vers l'orient; c'est ce que l'expérience confirme.

On a calculé, d'après les lois de la mécanique, l'étendue de cet écart pour diverses hauteurs, et la théorie

Digitized by Google

s'est trouvée parfaitement conforme aux résultats observés (*).

195. Lorsque Copernic, renouvelant les idées des anciens philosophes, présenta le système du mouvement de la terre, on lui objecta que les corps, dans leur chûte, ne participant plus à ce mouvement, devraient rester en arrière, et s'écarter vers l'occident de la verticale. Mais quand les lois du mouvement furent mieux connues, on sut que les corps doivent conserver, dans leur chûte, la vîtesse horisontale résultante de la rotation de la terre, à laquelle ils participaient d'abord. On conclut de là que les corps devaient tomber précisément au pied de la verticale. Enfin, lorsque les principes de la mécanique ont été encore plus approfondis, on a reconnu de nouveau qu'il devait y avoir une petite déviation, mais opposée à celle que l'on imaginait d'abord, et dirigée vers l'est. C'est ainsi que souvent les connaissances se perfectionnent et se rectifient en passant par des erreurs.

Il n'est pas tems encore de faire ressortir toute la force des indices que nous venons de recueillir sur la rotation de la terre. Les phénomènes, en se multipliant, nous amèneront de nouvelles preuves qui établiront enfin la réalité de ce mouvement d'une manière incontestable. Mais nous devons, dès à présent, conclure que, s'il n'est pas encore décidément prouvé par ces phénomènes, il en devient, du moins extrêmement probable.

(*) *Voyez* la note à la fin du livre.

Digitized by Google

CHAPITRE XVIII.

Des Réfractions atmosphériques.

196. Pour compléter les résultats exposés dans les chapitres précédens, et leur donner toute l'évidence et toute la rigueur qui caractérisent des vérités certaines, il nous reste à faire connaître les effets et la mesure des réfractions atmosphériques, qui modifient et altèrent toutes les apparences que nous observons : et si, pour découvrir les véritables effets du mouvement diurne de la sphère céleste, nous avons supposé d'avance les observations dépouillées de ces illusions optiques, il faut, pour ne pas faire de pétition de principe, montrer que les corrections qu'elles exigent peuvent se déduire de données purement physiques sur la constitution de l'atmosphère, indépendamment d'aucune connaissance du mouvement des astres. Commençons d'abord par considérer les réfractions dans leurs phénomènes les plus généraux.

197. Les rayons lumineux qui traversent l'atmosphère, et qui ne sont pas absorbés ou réfléchis par elle, ne poursuivent pas leur route en ligne droite ; ils sont continuellement courbés vers la terre. Pour comprendre la raison de ce fait, il faut savoir que les rayons de la lumière changent de direction, lorsqu'ils passent obliquement d'un milieu dans un autre, dont la densité est différente (*), par exemple, lorsqu'ils passent de

(*) La densité d'un corps dépend de la quantité de molécules

Digitized by Google

l'air dans l'eau, ou du verre dans l'air. Cet effet, que l'on nomme *réfraction*, est sensible dans une infinité d'expériences. C'est ainsi, par exemple, qu'un bâton paraît brisé quand on le plonge obliquement dans l'eau, et que tous les objets semblent changer de place lorsqu'on les regarde à travers un prisme de verre. En observant ces phénomènes, on est parvenu à y reconnaître la loi suivante : si un rayon lumineux traverse successivement deux milieux de même nature et de densité différente, et qu'au point où il passe de l'un dans l'autre on élève une perpendiculaire à leur surface commune, le rayon, en passant dans le milieu le plus dense, s'approchera de la perpendiculaire ; et le rapport du sinus de l'angle d'incidence au sinus de l'angle de réfraction sera constant.

198. L'atmosphère étant composée d'une infinité de couches, dont la densité augmente en approchant de la terre, les rayons lumineux qui la traversent sont dans le même cas que s'ils passaient successivement par des milieux différens ; ils doivent donc s'infléchir vers la terre à mesure que la densité augmente. Ce phénomène est indiqué dans la fig. 35, où le polygone $RR'R''R'''$ représente les directions successives que prend un rayon lumineux par l'effet des réfractions qu'il éprouve en traversant les différentes couches d'air A, A', A'', A'''.

Mais comme la densité de l'air, à différentes hauteurs, ne change pas brusquement, mais par degrés insensibles, le rayon lumineux ne décrit pas réellement un polygone en traversant l'atmosphère ; sa route est une ligne courbe, concave vers la surface terrestre, comme

---

matérielles qu'il contient sous un volume donné, par exemple, dans chaque centimètre cube ; généralement, *c'est le rapport de la masse du corps à son volume.*

Digitized by Google

le représente la fig. 35, ou, ce qui revient au même, c'est un polygone d'un nombre infini de côtés.

Lorsque le rayon lumineux arrive en O, à la surface de la terre, un observateur placé dans ce point, le reçoit suivant sa dernière direction OS'; et comme nous supposons toujours les objets sur la direction des rayons lumineux que nous en recevons, l'observateur jugera que l'astre S est en S'. S'il mesure la distance apparente au zénith, il la trouvera égale à ZOS', tandis qu'elle est réellement égale à ZOS. La différence $S'OS$ de ces deux angles se nomme la *réfraction astronomique*.

L'effet de la réfraction astronomique est donc de faire croire que les astres sont plus élevés au-dessus de l'horison qu'ils ne le sont réellement.

199. Il se produit un effet analogue entre deux points éloignés de la surface terrestre : quand on observe, par exemple, la hauteur d'une montagne, voy. *fig.* 36. On a nommé ce phénomène *réfraction terrestre*. Mais cette dénomination me paraît impropre, aussi bien que celle de *réfraction astronomique*. Car ces effets ne sont produits ni par la terre, ni par les astres. Ils résultent uniquement de la puissance réfringente de l'air. Il me semble donc qu'on devrait les comprendre sous la dénomination générale de *réfractions atmosphériques*, et j'en userai ainsi dans le cours de cet ouvrage.

200. Après avoir fait connaître, d'une manière générale, l'existence de ces phénomènes, je vais indiquer comment on parvient, par le calcul, à en trouver les lois précises ; je dis indiquer, car c'est seulement au moyen d'une analyse très-profonde qu'on peut les démontrer complètement.

D'après les expériences que l'on a faites sur la réfraction, il paraît qu'elle est due à une action propre que

Digitized by Google

les corps exercent sur la lumière. Cette action n'est sensible qu'à de petites distances, et elle paraît tout-à-fait analogue à ce que les chimistes nomment *affinité*. Ce n'est pas que l'on sache réellement si les corps attirent la lumière ; mais les phénomènes se passent comme si cette attraction avait lieu. Or, il n'en faut pas davantage pour la physique, qui ne s'occupe point de la nature des causes, mais de leurs effets ; et cela suffit aussi au calcul, qui, considérant cette attraction comme une force exercée par les corps, détermine les mouvemens qu'elle doit produire dans les particules de la lumière.

201. Pour appliquer ces considérations à la recherche des réfractions atmosphériques, il faut remarquer d'abord, qu'à cause du peu de hauteur de l'atmosphère et de sa rondeur, un rayon lumineux venu même des extrémités de l'horison, ne traverse pas une étendue d'air bien considérable. Dans cette étendue, si l'atmosphère est calme, la densité de l'air, à des hauteurs égales au-dessus du niveau de la mer, est partout la même. Ainsi, en supposant la terre sphérique, supposition suffisamment approchée pour l'objet qui nous occupe, on peut considérer l'atmosphère comme composée de couches sphériques et concentriques, dont la densité va en diminuant depuis la surface de la terre, à mesure qu'on s'élève dans l'atmosphère (*).

(*) A la rigueur on devrait donner aux couches atmosphériques une figure semblable à celle de la surface terrestre, par conséquent elliptique, puisque nous nous sommes arrêtés à regarder la terre comme un ellipsoïde de révolution. Mais, à cause de la petitesse de l'applatissement de la terre, le calcul effectué de cette manière donne sur les réfractions des différences tout-à-fait insensibles. A peine en résulte-t-il quelques secondes à l'horison, où les réfractions sont si incertaines.

Digitized by Google

Concevons maintenant un rayon lumineux qui, venu des extrémités de l'espace, pénètre dans une de ces couches sphériques. Si, par le centre des couches, qui est aussi celui de la terre, on mène un plan qui contienne en même tems le rayon lumineux, la couche sphérique se trouvera divisée par ce plan, en deux portions égales et symétriques, par rapport au rayon; et par conséquent, l'attraction qu'elle exerce sur lui, ne tendra pas à l'en détourner. Le rayon lumineux continuera donc à se mouvoir dans ce plan; et, en continuant le même raisonnement de proche en proche sur tous les points de sa route, on le conduira dans un même plan depuis son entrée dans l'atmosphère jusqu'à l'œil de l'observateur. Or, en supposant la terre sphérique, un plan mené ainsi par son centre et par l'œil de l'observateur, est nécessairement vertical, puisqu'il contient le rayon terrestre. La courbe concave décrite par le rayon lumineux, sera donc comprise toute entière dans le plan vertical qui passe par l'astre. Cela était facile à prévoir, car un pareil plan divisant toutes les couches en deux parties symétriques, leur attraction ne peut pas agir dans le sens qui lui est perpendiculaire; et par conséquent la molécule lumineuse une fois comprise dans ce plan, n'en peut plus sortir. De là on doit conclure que *l'effet de la réfraction se porte tout entier dans le sens vertical, de manière à augmenter les hauteurs apparentes des astres, et à diminuer les distances au zénith.*

202. Mais l'intensité de ces effets ne sera pas la même à toutes les hauteurs, car l'expérience fait voir que les rayons lumineux n'éprouvent aucune réfraction lorsque leur direction est perpendiculaire aux surfaces des milieux qu'ils traversent. Ainsi le lieu apparent d'un objet ne change pas quand on le regarde perpendicu-

Digitized by Google

lairement à travers un verre dont les deux surfaces opposées sont parallèles. *La réfraction devient donc nulle au zénith.* Car, en supposant les couches de l'atmosphère sphériques et concentriques à la terre, un rayon lumineux, mené du zénith à l'observateur, passera par le centre des couches atmosphériques et leur sera perpendiculaire.

L'expérience prouve aussi que la réfraction des rayons sur une même surface augmente avec leur obliquité. *La réfraction sera donc la plus grande possible à l'horison*, où le rayon lumineux rencontre les couches d'une manière plus oblique; et, de là jusqu'au zénith, elle ira en diminuant suivant une loi qu'il s'agit de déterminer. Pour cela, il faut déterminer la loi des inflexions successives que le rayon subit dans les différentes parties de sa route. Considérons-le lorsqu'il est déja entré dans l'atmosphère et qu'il passe d'une couche d'air dans la suivante. Il se trouve alors sollicité par deux forces contraires; l'attraction de la couche de laquelle il sort, celle de la couche où il entre. Celle-ci est la plus forte, parce qu'en approchant de la terre, le pouvoir refringent de l'air augmente en même tems que sa densité. Le rayon sollicité par ces attractions opposées se meut en vertu de leur différence, dans le sens de celle qui est la plus forte, et il se ploie vers le centre des couches, qui est aussi celui de la terre.

En supposant connue la densité de l'air dans ces deux couches, on peut calculer, d'après les principes de la mécanique, la déviation que le rayon doit éprouver. Il n'est pas même nécessaire pour cela, de connaître la loi suivant laquelle les corps attirent la lumière en la réfractant. Il suffit d'admettre, conformément à l'expérience, que cette attraction n'est sensible qu'à de très-

Digitized by Google

petites distances, et qu'elle est proportionnelle à la densité de l'air, ce qui est également prouvé par des expériences positives. La somme de tous ces dérangemens, depuis le haut de l'atmosphère jusqu'à la surface de la terre, produit la déviation totale du rayon lumineux, et forme la valeur entière de la réfraction.

203. Pour calculer exactement cette somme, il faudrait savoir comment la densité de l'air s'accroît en approchant de la terre; c'est ce qui paraît extrêmement difficile et même impossible, vu la multitude des causes variables qui peuvent concourir à cet effet.

Mais heureusement cette connaissance n'est absolument indispensable que pour les cas où l'astre est près de l'horison; et l'on peut, sans elle, obtenir un résultat très-exact lorsque la hauteur apparente excède 10 à 12 degrés décimaux. Alors les rayons lumineux rencontrent moins obliquement les couches de l'atmosphère situées au-dessus de l'observateur. Cette circonstance diminue la courbure de la portion de trajectoire que les molécules lumineuses ont à décrire, pour venir du sommet de l'atmosphère jusqu'à la surface terrestre. Car c'est surtout dans le point où la trajectoire devient horisontale, que sa courbure est la plus grande, parce qu'alors le rayon rencontrant les couches, de la manière la plus oblique, est plus fortement dévié. Mais, de part et d'autre de ce point, la courbure de la trajectoire va toujours en diminuant, comme le représente la figure 37, de sorte que cette courbe s'approche continuellement de la direction rectiligne à mesure qu'elle s'élève vers les couches supérieures de l'atmosphère. Aussi, lorsqu'on ne cherche que cette dernière portion presque rectiligne, comme cela a lieu pour les hauteurs apparentes plus grandes que douze degrés décimaux, l'inflexion totale du rayon peut être

Digitized by Google

aisément évaluée, par des séries très-convergentes qui la donnent avec toute l'approximation nécessaire (*). On trouve alors que la quantité de cette déviation, depuis l'entrée du rayon dans l'atmosphère jusqu'à l'œil de l'observateur, ne dépend plus des degrés par lesquels la densité de l'air augmente en approchant de la terre, mais seulement de l'augmentation totale de cette densité; c'est-à-dire, de la pression de l'atmosphère et de la température dans le lieu où se fait l'observation; circonstances qui sont indiquées par l'état du baromètre et du thermomètre. Ce résultat est indépendant de toute hypothèse sur la constitution de l'atmosphère.

204. La formule qui exprime les lois de la réfraction dans ces circonstances, est extrêmement simple, et peut s'énoncer de la manière suivante : *Sous une même pression et une même température, la réfraction est pro-*

(*) Pour ceux qui savent le calcul différentiel, deux lignes de calcul éclairciront complètement ce qu'il m'a été très-difficile d'énoncer sans ce secours. Soit r le rayon mené du centre de la terre à la molécule lumineuse, dans un point quelconque de son cours, et soit v l'angle formé par ce rayon avec la verticale de l'observateur. L'équation différentielle de la trajectoire, décrite par la molécule lumineuse, est de la forme $dr = dv\sqrt{Q}$. Q étant une fonction de r dépendante de la loi que suit le décroissement des densités. Lorsque la trajectoire devient horisontale, dr doit être nul, ce qui donne $Q = 0$: Par conséquent, si elle est près d'être horisontale, Q sera aussi presque nul; et le radical $\sqrt{Q}$ ne pourra pas se développer en série, parce qu'alors les divers termes qui le composent seront comparables entre eux. Mais si l'on sait, *à priori*, que la portion de la trajectoire que l'on considère, est très-éloignée de ce *minimum*, comme cela a lieu vers 10 ou 12 degrés de hauteur au-dessus de l'horison, alors, quelques-uns des termes dont Q se compose, deviennent beaucoup plus grands que les autres, le développement du radical $\sqrt{Q}$ en série est possible, et l'équation de la trajectoire s'intègre par approximation.

Digitized by Google

portionnelle à la tangente de la distance apparente de l'astre au zénith diminuée de trois fois la réfraction (*).

205. Le coefficient de cette proportion dépend de la force réfringente de l'air sous la pression et la température données. Or, nous avons trouvé, Arago et moi, par des expériences exactes, que lorsqu'un rayon de lumière passe du vide dans l'air, la température étant celle de la glace fondante, et la pression atmosphérique $0^m,76$, le sinus de réfraction est au sinus d'incidence comme l'unité est à 1,0002943321. Avec cette donnée, le calcul fait connaître, le coefficient de la réfraction dans les mêmes circonstances, et on le trouve égal à $187'',24$ de la division décimale du cercle ou $60'',666$ de la division sexagésimale.

Cette valeur varie comme la force réfringente de l'air, et par conséquent comme sa densité; car dans le travail dont je viens de parler, nous avons prouvé que la force réfringente de l'air et sa densité sont constamment proportionnelles l'une à l'autre. La densité de l'air est proportionnelle à la pression qu'il éprouve, et réciproque au volume que la

---

(*) Ou plus exactement de trois fois et un quart. C'est-à-dire, qu'en nommant r la réfraction correspondante à la distance au zénith Z, on a

$$r = A \text{ tang } \{Z - 3,25.r\}$$

A étant une quantité constante pour une même pression et une même température. Sous la pression de $0^m,76$, et à la température de la glace fondante, nous avons trouvé Arago et moi, par des expériences exactes, $A = 187'',24$ de la division décimale du cercle, ce qui revient à $60'',666$ de la division sexagésimale; on a donc, alors,

$r = 187'',24 \text{ tang } \{Z - 3,25.r\}$ si l'on adopte la division décimale.

$r = 60'',666 \text{ tang } \{Z - 3,25.r\}$ si l'on adopte la division sexagésimale.

Digitized by Google

température lui fait occuper. Ce volume étant pris pour unité, ou représenté par 1 à zéro de température, augmente ensuite de 0,00375 pour chaque degré du thermomètre centésimal, la pression restant la même. Par conséquent, pour réduire le coefficient $187''.24$ à une température et à une pression données, il faut le diviser par l'unité, augmentée ou diminuée d'autant de fois 0,00375 qu'il y a de degrés marqués par le thermomètre centésimal au-dessus ou au-dessous de zéro, et multiplier le résultat par le rapport direct des pressions (*).

Le coefficient déterminé par nos expériences répond à la latitude de 50 grades. Si l'on voulait le transporter à une autre latitude, en le rapportant toujours à la pression de $0^m,76$, il faudrait y faire une petite réduction. Car la pesanteur étant variable avec la latitude, le poids d'une colonne de mercure égale en longueur à $0^m,76$, varie dans le même rapport, et par conséquent notre coefficient doit suivre cette proportion. Or, dans le chapitre précédent, on a vu que la longueur du pendule qui est $0^m,7416326$, sur le parallèle de 50 grades,

(*) Le volume à zéro étant 1, deviendra à $+ t$ degrés $1 + t.0,00375$. Le rapport inverse des volumes sera donc $\frac{1}{1+t.0,00375}$. Soit p la pression exprimée en parties du mètre. Le rapport direct des pressions sera $\frac{p}{0^m,76}$. Le rapport des densités sera le produit des deux précédens. Ce sera, par conséquent, $\frac{p}{0.76.\{1+t.0,00375\}}$. En le multipliant par $187'',24$, on aura, en secondes décimales, le coefficient de la réfraction pour la pression p et la température t. Ce rapport des densités de l'air est d'un usage continuel dans les recherches de physique. C'est Gay-Lussac qui a trouvé, par des expériences très-précises, le coefficient 0,00375 de la dilatation.

Digitized by Google

éprouve, à partir de ce parallèle, une variation exprimée par $-0^m,002055 \cos 2L$; L étant la latitude. Le coefficient $187'',24$ suivra donc la même proportion, car la pesanteur est partout proportionnelle à la longueur du pendule ; c'est-à-dire, que sa variation à partir du même parallèle, sera $-\frac{187'',24 \cdot 0,002055}{0,7416326} \cos 2L$ ou $-0'',52 \cos 2L$.

Au moyen de ces corrections, le coefficient $187''.24$ peut servir par toute la terre, sur les montagnes aussi bien que dans les plaines, et s'adapter à tous les états de l'air.

206. Il y a toujours dans l'atmosphère une certaine quantité d'eau en vapeur. Cette eau, lorsqu'elle se condense, forme la pluie, la grêle, la neige et tous les météores aqueux. Sous l'état de vapeur, elle forme une partie de la pression atmosphérique indiquée par le baromètre, et doit agir aussi sur la lumière. Si son action était différente de celle de l'air, dont elle tient la place, il faudrait décomposer, pour ainsi dire, la pression barométrique en deux parties, et calculer séparément la partie de la réfraction due à l'air et à la vapeur. Or, on connaît par les expériences de Newton la force réfringente de l'eau liquide. Supposons qu'elle reste la même dans l'état de vapeur, avec la seule diminution due au rapport des densités. On pourra aisément calculer quelle serait la réfraction produite par une vapeur aqueuse d'une densité donnée, par exemple d'une densité égale à celle de l'air. On trouve ainsi que cette vapeur réfracterait un peu plus que l'air atmosphérique. Mais la vapeur d'eau suspendue dans l'air, et qui soutient une partie de la pression barométrique, n'a pas une densité tout-à-fait égale à celle de l'air, qui produirait le même effet. Car on sait, par les expériences de Watt et de Saussure, que sous une pression et une température égales, la densité de la vapeur

Digitized by Google

d'eau est à celle de l'air comme 10 à 14. Il faut donc ramener à ce terme l'action réfringente de la vapeur d'eau pour la rendre conforme à la densité qu'elle a réellement dans l'atmosphère. Cette force réfringente, ainsi réduite, se trouve presque exactement égale à celle de l'air sous la même pression. Ainsi, dans le calcul des réfractions, on peut se dispenser de distinguer ce qui appartient à l'air et à la vapeur, et supposer que toute la déviation du rayon lumineux est produite par une masse homogène d'air atmosphérique, soutenant la pression indiquée par le baromètre.

Ce beau rapprochement est dû à l'auteur de la *Mécanique céleste*, ainsi que toute la théorie des réfractions, dont nous exposons ici les principes. Nous l'avons depuis appuyé, Arago et moi, par de fortes analogies, en faisant voir que des changemens dans l'état des corps, beaucoup plus intenses que leur réduction en vapeur, n'altèrent pas considérablement leurs forces réfringentes, si ce n'est par les variations de densité qui en résultent. Et enfin je l'ai confirmé par des expériences directes faites sur la réfraction de l'air saturé d'humidité, à de hautes températures.

207. La formule des réfractions étant ainsi établie, et les corrections qu'elle exige étant connues, on peut calculer d'avance la réfraction de degré en degré, ou de minute en minute, pour toutes les hauteurs apparentes depuis 12° jusqu'au zénith, avec les corrections qu'elles exigent, selon les pressions et les températures les plus ordinaires dans nos climats. On forme ainsi des *tables de réfraction* que l'on peut consulter immédiatement pour corriger les observations, sans avoir besoin de recourir, pour chaque cas, au calcul de la formule. Car si la distance au zénith observée ne tombe pas exactement sur un des nombres de a table, elle se trouvera comprise entre deux d'entre eux

Digitized by Google

qui en seront peu éloignés. Alors, par une simple proportion on verra ce qu'il faut ajouter ou retrancher pour avoir égard à la différence. Ce sera une *interpolation* absolument semblable à celle que l'on fait en se servant de tables de logarithmes, lorsqu'on a un logarithme qui ne s'y trouve pas exactement compris. On agira de même pour les hauteurs du baromètre et du thermomètre. Au moyen des corrections dépendantes de ces deux instrumens, la même table de réfraction servira, sur les montagnes et dans les plaines. Quant à l'hygromètre, qui indique le degré d'humidité de l'air, d'après ce que l'on a vu tout-à-l'heure, il est absolument inutile d'y avoir égard.

208. Telles sont les lois des réfractions atmosphériques à des hauteurs plus grandes que 12° centésimaux. Lorsque le rayon lumineux fait avec l'horison un angle moindre, il devient indispensable d'introduire dans le calcul la loi que suit la densité de l'air, à diverses hauteurs. On sent que cette loi doit être sans cesse modifiée par les vents et par toutes les causes variables qui agitent continuellement l'atmosphère; mais même dans l'état calme, elle dépend du décroissement de la température. Si la température était uniforme dans toute l'atmosphère, la densité des couches décroîtrait en progression géométrique, quand leur hauteur croîtrait en progression arithmétique. Alors on trouve par le calcul que la réfraction à l'horison serait de 3979″ de la division décimale. Si la température décroissait en progression arithmétique, les densités suivraient la même proportion, et la réfraction horisontale serait de 7391″ décimales, la température étant toujours supposée celle de la glace fondante, et la pression $0^m,76$. Or, dans les mêmes circonstances, la valeur moyenne de la *réfraction horisontale*, qui se déduit d'un grand nombre d'observations, est 6500″. Cette valeur, comprise entre les deux autres,

montre que la vraie constitution de l'atmosphère est comprise entre les deux suppositions précédentes. On peut donc essayer une loi moyenne entre ces deux suppositions; et qui participe à-la-fois de la progression géométrique et arithmétique. Mais il ne suffit pas que cette hypothèse donne une réfraction horisontale peu différente de la véritable, il faut encore qu'elle satisfasse aux observations du baromètre et de la température, faites à diverses hauteurs dans l'atmosphère. Or, les voyages entrepris par les physiciens sur des montagnes et dans des aérostats, particulièrement celui de Gay-Lussac, ont fourni sur cet objet des données très-précieuses. En pliant à ces faits l'hypothèse du décroissement de la chaleur, on la rapproche encore plus de la nature, et l'on doit par conséquent s'attendre à en déduire pour les réfractions à de petites hauteurs des résultats qui s'écartent le moins possible de la vérité. C'est ce qu'a fait M. Laplace, et les réfractions déduites de ses formules sont les plus exactes que l'on ait données.

209. Les réfractions au-dessous de 12° étant influencées, comme on vient de le voir, par la densité des couches d'air que le rayon lumineux traverse en s'approchant de la terre, sont extrêmement variables, et ce qui est plus fâcheux encore pour l'exactitude, elles varient par des causes lointaines, que l'observateur ne peut ni prévoir ni apprécier. Aussi s'efforce-t-on, autant qu'il est possible, de soustraire les résultats à leur influence. C'est pourquoi toutes les observations astronomiques, qui n'ont pas directement la réfraction pour objet, ou qui ne sont pas de nature à en être indépendantes, se font au-dessus de 12° de hauteur. S'il devient quelquefois indispensable d'observer au-dessous de cette limite, on corrige les observations par les tables qui sont étendues exprès jusqu'à

Digitized by Google

l'horison même. Mais on compte beaucoup moins sur les résultats.

On conçoit que les valeurs absolues des réfractions près de l'horison doivent varier avec la densité de l'air dans le lieu où l'on observe ; non-seulement à cause des changemens qui en résultent en ce point d'une manière immédiate, mais à cause de l'influence de cette densité initiale sur celle des couches supérieures d'après la loi admise pour le décroissement des densités. Par cette raison, les changemens que ces réfractions éprouvent ne sont plus simplement proportionnels à ceux de la densité dans le lieu où l'on observe, comme cela avait lieu pour les hauteurs apparentes plus grandes que 12°. La dépendance mutuelle de ces variations est beaucoup plus compliquée dans les petites hauteurs. Cependant on sait les calculer, et on les joint aux tables qui s'étendent ainsi à toutes les distances zénithales depuis 0 jusqu'à 90°, et qui, au moyen des corrections qu'elles renferment pour le baromètre et le thermomètre, peuvent servir dans tout cet intervalle, sur les montagnes aussi bien que dans les plaines.

210. On peut même les étendre au-dessous de l'horison par un artifice très-simple ; et cela peut être utile lorsqu'on observe du haut d'une montagne, ou en général d'un lieu élevé au-dessus de la surface de la mer. Alors si l'on conçoit la trajectoire *OMS*, *fig.* 38, prolongée indéfiniment au-dessous de l'horison jusqu'à l'astre, cette trajectoire aura nécessairement un point *M* qui sera plus bas que tous les autres, et dans lequel elle deviendra parallèle aux couches, c'est-à-dire horisontale. De plus, à cause de la sphéricité des couches, la trajectoire sera nécessairement symétrique de part et d'autre de ce point. Mais elle ne sera curviligne que dans l'étendue de l'atmosphère terrestre ;

et après en être sortie, elle se prolongera suivant une ligne droite terminée à l'astre. Maintenant si, du point O, on mène aussi à l'astre la droite OS au-dessous de l'horison, la réfraction sera égale à l'angle TOS formé par cette ligne OS avec la tangente de la trajectoire au point O. De même, en menant du point M, la droite MS terminée à l'astre, et la droite AMT tangente à la trajectoire, l'angle AMS sera la réfraction horisontale en M. Or, à cause du peu d'épaisseur de l'atmosphère comparativement à la grande distance des astres, les lignes OS, MS peuvent être censées parallèles entre elles, et à celle qui est le dernier prolongement de la trajectoire ; ou ce qui revient au même, les angles formés par ces trois lignes, au centre de l'astre, peuvent être considérés comme infiniment petits (*). Si donc nous répétons la même opération de l'autre côté de la trajectoire, et que nous menions des points O et M des droites OS', MS', parallèles à sa dernière direction, l'angle $S'OT'$ sera la réfraction d'un astre élevé au-dessus de l'horison autant que le premier est abaissé au-dessous ; et l'angle $A'MS'$ égal à AMS, à cause de la symétrie de la courbe, représenterait encore la réfraction horisontale au point M. Ainsi, en nommant cette réfraction R, on aurait l'angle $SMS' = SOS' = 180 - 2R$; et comme on a d'ailleurs $TOS + T'OS' = 180° - SOS'$, il s'ensuit évidemment $TOS + T'OS' = 2R$, et enfin $TOS = 2R - T'OS'$; c'est-à-dire que *la réfraction d'un astre observé au-dessous de l'horison est égale au double de la réfraction horisontale au point le plus bas de la trajectoire, moins la réfraction d'un second astre aussi élevé au-dessus de l'horison*

(*) Cette proposition se trouvera démontrée dans une note à la fin du livre.

Digitized by Google

que le premier paraît abaissé au-dessous. Cette dernière partie de la réfraction s'obtient immédiatement par les tables. Pour obtenir aussi la première, on cherche, par le calcul, quelle doit être la densité de l'air au point le plus bas de la trajectoire. Cela est facile lorsque l'on connaît l'inclinaison initiale de cette courbe au point O, ou l'abaissement apparent de l'astre, et la loi suivant laquelle les densités des couches de l'atmosphère doivent croître à partir de ce point. La densité au point M étant connue, on en déduit la réfraction horisontale R suivant la même loi, et l'on connaît ainsi les deux quantités, dont la différence forme la réfraction cherchée. Au moyen de calculs semblables, on peut étendre, et on étend en effet les tables de réfraction aux divers degrés de dépression apparente où l'on peut avoir occasion d'observer.

L'usage de ces tables suppose toujours comme une donnée indispensable, que l'on ait observé avec exactitude la hauteur du baromètre et la température, deux choses qui exigent le plus grand soin. Le baromètre doit être bien purgé d'air, par l'ébullition du mercure. Il doit être muni d'un vernier qui donne au moins les dixièmes de millimètre, si l'on observe en millimètres, comme dans nos baromètres français. De plus, dans les observatoires fixes il est bon d'employer un tube d'un diamètre un peu large, comme d'environ deux centimètres, afin d'éviter l'effet de la force capillaire, qui, dans les baromètres à cuvette, produit sur la colonne du mercure un petit abaissement d'autant plus sensible que le diamètre du tube est moindre. Et dans les voyages, où l'on est souvent obligé d'employer des tubes de différens diamètres, il faut faire à toutes les hauteurs une petite correction dépendante de cette cause, et dont on trouvera la valeur dans la table suivante, qui a été déterminée

Digitized by Google

par M. Charles Cavendish, d'après des expériences très précises (*).

Diamètre intérieur du tube.	Poids du mercure contenu dans 1 centim. de hauteur.	Abaissement de la colonne.
Millimètres.	Grammes.	Millimètres.
2,54	0,688	3,556
3,84	1,549	2,337
5,08	2,753	1,702
6,35	4,302	1,270
7,62	6,194	0,914
8,89	8,431	0,635
10,16	11,012	0,381
12,70	17,206	0,178
15,24	24,777	0,127

211. Dans tous les cas la hauteur de la colonne doit être mesurée depuis le sommet de la convexité qui la

(*) Quoique la seconde colonne ne tienne pas essentiellement au résultat, on l'a aussi donnée, parce que le meilleur moyen de mesurer le diamètre du tube, est de peser la quantité de mercure nécessaire pour remplir une portion de sa longueur égale à 1 centimètre. Soit x le diamètre du tube; P le poids observé, exprimé en grammes, on aura $x = 15.24 \sqrt{\frac{P.}{24.777}}$. Car les diamètres des cylindres de même hauteur sont comme les racines carrées de leurs volumes ou de leurs poids. Il n'est pas besoin de remarquer que l'expérience doit être faite sur la partie du tube où la colonne barométrique se termine ordinairement. Cette table est extraite des Transactions philosophiques, où elle se trouve rapportée dans un excellent mémoire de M. Charles Cavendish, sur les instrumens de météorologie qui servent à la Société royale de Londres.

Digitized by Google

termine, car la pression sur la base est due à cette hauteur totale. Enfin, il faut attacher au baromètre même un petit thermomètre dont la boule soit enchâssée dans sa monture, pour connaître la température du mercure, qui peut souvent différer sensiblement de celle de l'air; parce que la masse du baromètre l'empêche d'être affecté aussi vîte par les changemens de température. Les hauteurs du mercure observées à des températures diverses doivent, pour devenir comparables, être réduites à une même température, ce qui se fera très-exactement en diminuant la longueur observée de $\frac{1}{5412}$ pour chaque degré d'abaissement du thermomètre centésimal au-dessous de la température que l'on aura choisie pour point de départ, ou l'augmentant dans le même rapport pour chaque degré d'accroissement. Tous les astronomes devraient s'accorder pour ramener ainsi toutes les hauteurs du mercure à une même température, par exemple à celle de la glace fondante, qui est la même dans tous les pays.

212. Il me reste à parler du thermomètre et des vérifications qu'il exige. Les deux points fixes de sa division étant la température de la glace fondante et celle de l'eau bouillante, il doit toujours marquer zéro dans la première, et 100° dans la seconde, si la division est centésimale, ou 80° si elle est de Réaumur. On devra donc s'assurer qu'il satisfait à ces conditions; et comme la température de l'eau bouillante augmente ou diminue avec la pression de l'air, il faudra observer la hauteur du baromètre au moment de l'ébullition. Les tables de réfraction de M. Laplace, que l'on trouvera à la fin de ce livre, et qui sont les plus exactes de toutes, comme étant fondées sur une théorie très-exacte et sur des expériences très-précises, supposent que le thermomètre marque 100° dans l'eau bouillante sous la pression de $0^m,76$, qui est

Digitized by Google

la pression moyenne au niveau de la mer en Europe. Très-près de cette limite la température de l'ébullition varie de $\frac{1}{10}$ de degré centésimal pour 2 $\frac{7}{10}$ millimètres de variation dans la hauteur barométrique. On trouvera à la fin de ce livre une formule générale qui donne la température de l'ébullition pour toutes les hauteurs.

Après avoir vérifié les points extrêmes de la division du thermomètre, il faut encore s'assurer de son exactitude dans les points intermédiaires. Pour cela il n'y a pas d'autre méthode que de le comparer avec un thermomètre étalon construit, d'après les principes rigoureux donnés par Gay-Lussac, et que j'ai exposés dans la traduction de la Physique de Fischer.

213. Enfin, pour que les observations astronomiques se trouvent faites comme les tables de réfraction le supposent, il faut éviter que la température dans l'intérieur de l'observatoire soit différente de celle du dehors, et il faut au contraire employer tous les moyens possibles pour qu'elles s'accordent exactement. Quand cela n'aura pas lieu, on observera le thermomètre intérieur et le thermomètre extérieur; mais lequel faudra-t-il choisir pour calculer les observations? c'est ce qu'il est impossible de décider *à priori*; cependant l'expérience prouve qu'en prenant le thermomètre extérieur, les résultats s'accordent mieux qu'avec l'autre.

J'ai beaucoup insisté sur ces détails, parce qu'ils sont d'une application générale et d'une indispensable nécessité. L'astronomie est maintenant si parfaite, les quantités qui lui restent encore à mesurer sont si petites qu'on ne peut espérer d'y parvenir qu'à l'aide des soins les plus minutieux, et par une extrême recherche d'exactitude dans les observations. D'ailleurs les précautions que nous venons d'indiquer sont applicables dans une infinité

Digitized by Google

de recherches physiques, et elles sont indispensablement nécessaires pour leur donner de la rigueur.

214. Il me reste à parler de la réfraction terrestre. D'après l'idée que nous en avons donnée, § 199, on voit que ce n'est que la portion de la réfraction atmosphérique qui se produit depuis l'objet jusqu'à l'observateur. Le calcul donne le moyen de l'évaluer de la même manière, et en cela il est facilité par cette remarque d'expérience qu'*à de petites hauteurs la densité de l'air varie suivant une progression arithmétique, proportionnellement aux différences de niveau.* D'après cela, on trouve que *la réfraction terrestre est proportionnelle à l'arc terrestre compris entre l'observateur et l'objet*, c'est-à-dire, à l'angle que forment entre elles les deux verticales menées à ces points. Le coefficient de cette proportionnalité varie avec la densité de l'air dans le lieu où l'on observe, et avec la raison de la progression arithmétique qui exprime la loi du décroissement des densités. D'après cela, on conçoit qu'il doit être sujet à de grandes variations. Il peut même arriver par des causes accidentelles et extraordinaires, que le décroissement des densités se fasse en sens opposé de ce qu'il est ordinairement, c'est-à-dire que la densité croisse de bas en haut, au lieu de décroître, du moins jusqu'à une certaine hauteur. Alors la réfraction, au lieu d'élever les objets, les abaisse. Dans la supposition d'un état calme de l'air, pour la température de la glace fondante et pour une hauteur du baromètre égale à $0^m,76$, on trouve le coefficient de l'arc dans l'expression de la réfraction terrestre égal à $\frac{1}{11,9003}$, c'est-à-dire que dans ces circonstances la réfraction terrestre est $\frac{1}{11,9003}$ de l'arc terrestre, compris entre l'observateur et l'objet. M. Delambre, en discutant un grand nombre d'observations de signaux faites pendant la mesure de la méridienne, a trouvé la valeur moyenne de ce coefficient

*

Digitized by Google

en France égale à 0,08 ou $\frac{1}{12,5}$, ce qui diffère peu de la précédente. Connaissant la valeur de la réfraction terrestre, on la retranchera des hauteurs apparentes observées, ou ce qui revient au même, on l'ajoutera aux distances zénithales des objets, et l'on aura ces distances telles qu'on les aurait observées réellement sans l'effet de la réfraction. Avec ce résultat et l'éloignement des objets, il est facile de calculer leur hauteur au-dessus du niveau de l'observateur. On verra quelques applications de ce calcul dans un chapitre sur le nivellement, placé à la fin de l'ouvrage.

215. Dans l'état ordinaire de l'atmosphère, où la réfraction terrestre élève les objets, elle élève aussi l'horison de la mer, et par conséquent la dépression apparente de cet horison, observée d'un lieu élevé, est moindre que la dépression réelle. Mais il est facile de les déduire l'une de l'autre; et alors on peut calculer les hauteurs absolues des objets au-dessus du niveau de la mer, d'après les dépressions observées de l'horison (*).

(*) Soit I la dépression vraie qui s'observerait réellement sans l'effet de la réfraction. Le rayon visuel, qui alors serait rectiligne, toucherait la surface de la mer en un certain point T, *fig.* 39; et si de ce point et de l'observateur on mène deux verticales, elles se croiseront au centre de la terre, supposée sphérique, en formant un angle OCT égal à HOT, par conséquent à I ou à la dépression même. Maintenant la réfraction venant à agir, la dépression diminuera et deviendra I'; mais en même tems, le point de tangence de la trajectoire sur la surface de la mer s'éloignera et passera en T'; l'angle, au centre de la terre, entre ce point et l'observateur, ne sera plus I, mais $I + i$, i étant un très-petit angle; car la différence n'étant produite que par la réfraction, doit être très-petite comme elle. Cela posé, pour réduire la dépression I à sa valeur vraie, il faut lui ajouter la réfraction pour l'arc $I + i$, c'est-à-dire, $nI + ni$, en représentant par n le coefficient de la réfraction

Digitized by Google

216. Dans tout ce qui précède, nous avons supposé que l'atmosphère, au moins dans la petite étendue que le rayon lumineux traverse, est composée de couches sphériques, concentriques à la terre, et dont la densité diminue à mesure qu'on s'élève. C'est en effet ce qui a lieu dans l'état paisible et constant d'équilibre, lorsque

---

terrestre, dont nous avons vu que la valeur moyenne est 0,08. Mais à cause de la petitesse de n et de i, on voit que l'on peut négliger le produit ni, respectivement à nI, c'est-à-dire, que l'on peut se borner à prendre la réfraction pour l'arc I, au lieu de la calculer pour l'angle $I + i$. La dépression apparente I' étant ainsi réduite, deviendra $I' + nI$, et comme elle doit alors s'accorder avec la dépression vraie, on aura évidemment

$$I' + nI = I \qquad \text{ou} \qquad I' = \{ 1 - n \} . I.$$

Pour de très-petits angles, tels que I et I', le rapport des arcs est, à fort peu près, le même que celui des tangentes; en substituant ce rapport dans l'équation précédente, elle deviendra

$$\text{tang } I' = (1 - n) \text{ tang } I.$$

Or, on a vu qu'en nommant h la hauteur de l'observateur au-dessus du niveau de la mer, cette hauteur étant exprimée en mètres, et a le rayon moyen de la terre, ou 6366745^m, on a . . . . . $\text{tang } I = \sqrt{\frac{2h}{a}}$; en substituant cette valeur de tang I dans l'équation précédente, il viendra

$$\text{tang } I' = (1 - n) \sqrt{\frac{2h}{a}};$$

d'où l'on tire encore

$$h = \frac{a . \text{tang}^2 I'}{2 (1 - n)^2}.$$

La première formule qui donne tang I' servira pour calculer la

l'atmosphère est depuis longtems calme et n'éprouve aucune agitation. Mais une infinité de causes accidentelles et variables doivent troubler souvent ces lois, et apporter en conséquence des changemens accidentels dans les réfractions.

217. Par exemple, si un vent élevé dans les hautes régions de l'air vient à souffler pendant longtems suivant une direction constante, les couches inférieures qu'il comprime ne peuvent plus garder leur courbure sphérique, et les réfractions calculées d'après cette courbure cesseront d'être tout-à-fait exactes. Un vent constant, mais inférieur troublera également leurs lois. Ces suppositions ne sont point invraisemblables, car on sait, par l'expérience des aéronautes, qu'il existe souvent dans l'atmosphère, à diverses hauteurs, des courans différens et même opposés, et l'on peut encore s'en convaincre en observant avec attention les nuages qui flottent dans l'atmosphère. On les voit souvent marcher dans des sens différens. Ce sont probablement des causes de ce genre qui produisent les petits écarts de 3 ou 4 secondes, que l'on remarque entre les observations faites à différens jours, même au zénith, avec le plus grand soin et les instrumens les plus précis. Le seul moyen

---

dépression apparente, quand on connaîtra la hauteur de l'objet au-dessus du niveau de la mer. La seconde, au contraire, fera connaître la hauteur, quand on aura observé la dépression. Cette dernière est souvent utile; mais les variations qu'éprouve le coefficient n, y jettent un peu d'incertitude, sur-tout lorsqu'on veut l'employer pour des hauteurs extrêmement petites, parce que c'est sur-tout dans les couches inférieures que se font les variations irrégulières de la densité. Quand il s'agira de hauteurs un peu plus considérables, comme celles des montagnes ou des tours élevées, on aura ainsi la valeur véritable, à 5 ou 6 mètres près, si l'observation est faite avec soin, par un tems calme.

Digitized by Google

d'éluder ces irrégularités, et d'anéantir leurs effets, c'est de répéter et de multiplier les observations, dans des circonstances diverses et par des états de l'atmosphère différens. Car ces petites erreurs étant produites par des causes qui n'ont rien de constant et de fixe, une grande partie d'entre elles doit toujours s'entredétruire par l'effet de leur compensation; et ce qui reste, étant distribué sur plusieurs milliers d'observations, n'a plus d'influence sensible.

218. Il peut arriver encore, mais bien plus rarement, que quelques-unes des couches de l'atmosphère prennent momentanément une densité moindre que celles des couches qui leur sont superposées; alors, les rayons lumineux au lieu d'être infléchis vers la terre seront réfléchis, et la réfraction au lieu d'élever les objets les abaissera. Cela arrivera, par exemple, dans la couche d'air contigue à un sol aride et sablonneux, que l'ardeur du soleil échauffe fortement. Cette couche acquérant une force élastique plus grande, par l'élévation de température que lui communique le sol en contact avec elle, se dilate, et soulève les couches supérieures qui, plus éloignées du sol, se ressentent moins de son influence. Alors, la couche la plus basse sera moins dense que celles qui sont au-dessus d'elles. La densité décroîtra ainsi jusqu'à une certaine distance du sol qui sera ordinairement fort petite, après quoi elle deviendra sensiblement constante et diminuera ensuite avec la hauteur, conformément à la constitution habituelle de l'atmosphère. Si l'on conçoit un observateur placé dans la couche de densité moyenne, et regardant un objet éloigné, situé aussi dans cette couche, il le verra de deux manières; directement, à travers la couche d'air de densité uniforme qui les sépare, et indirectement, par des rayons réfléchis dans

Digitized by Google

la couche inférieure. Ces rayons d'abord, dirigés de l'objet vers la surface terrestre sous une certaine inclinaison, entrent dans les couches de moindre densité, s'y réfractent en prenant une direction plus approchante de l'horisontale, puis se relèvent, et rentrant dans les couches supérieures dont la densité les attire, reviennent passer par l'œil de l'observateur. Il y aura alors deux images de l'objet; l'une droite, par vision directe, l'autre renversée, par la réflexion.

219. Il faut rapporter à ces causes un phénomène très-curieux, qui est connu des marins sous le nom de *mirage*, et que l'armée française a eu plusieurs fois l'occasion d'observer dans l'expédition d'Egypte. Le terrain de la Basse-Egypte est une vaste plaine, parfaitement horisontale. Son uniformité n'est interrompue que par quelques éminences, sur lesquelles sont situés les villages qui, par ce moyen, se trouvent à l'abri de l'inondation du Nil. Le soir et le matin, l'aspect du pays est tel que le comporte la disposition réelle des objets et leur éloignement. Mais lorsque la surface du sol s'est échauffée par la présence du soleil, le terrain semble terminé, à une certaine distance, par une inondation générale. Les villages, qui se trouvent au-delà, paraissent comme des îles situées au milieu d'un grand lac. Sous chaque village on voit son image renversée, comme elle paraîtrait effectivement dans l'eau. A mesure que l'on approche, les limites de cette inondation apparente s'éloignent, le lac imaginaire qui semblait entourer le village se retire; enfin il disparaît entièrement, et l'illusion se reproduit pour un autre village plus éloigné. Ainsi, comme le remarque M. Monge, de qui j'emprunte cette description, tout coucourt à compléter une illusion qui est quelquefois cruelle, sur-tout dans le désert, parce qu'elle présente

Digitized by Google

vainement l'image de l'eau dans le tems même où l'on en aurait le plus grand besoin. M. Monge a expliqué ce phénomène, d'après les lois de l'optique, dans le Ier. vol. de la Décade égyptienne, et son explication revient à celle que nous donnons ici.

220. On observe à-peu-près la même chose à la mer dans des tems très-calmes. Un navire, vu dans le lointain et à l'horison, offre quelquefois deux images, l'une directe, l'autre renversée; celle-ci absolument pareille à l'autre, souvent égale en intensité, en un mot parfaitement semblable à l'effet de la réflexion dans un miroir. De là est venu le nom de *mirage* que les marins ont donné à ce phénomène. Comme il est produit par la différence des températures de l'eau et de l'air, il se montre ordinairement dans les changemens subits de température, la densité de la mer ne permettant pas à sa surface de partager ces variations aussi vîte que l'atmosphère. Mais, d'un autre côté, la température des eaux et l'évaporation qui se fait continuellement à leur surface, s'oppose à ce qu'elles prennent une température aussi élevée que la surface sablonneuse d'un terrain aride. Par ces raisons, le phénomène des doubles images se montre plus rarement à la mer et y dure peu; au lieu qu'il est journalier en Egypte et sur quelques plaines sablonneuses (*) où les mêmes circonstances se reproduisent presque tous les jours aux mêmes hauteurs du soleil.

221. Nous avons observé, M. Mathieu et moi, un grand nombre de phénomènes de ce genre à Dunkerque, sur le bord de la mer, et j'en ai donné la théorie mathématique dans les Mémoires de l'Institut de France. J'ai

(*) Par exemple, à Dunkerque, sur la laisse de basse mer, au pied et à l'ouest du Risban.

Digitized by Google

prouvé que les trajectoires consécutives, qui partent de l'œil de l'observateur, se coupent sur leurs secondes branches de manière à former une caustique au-dessous de laquelle aucun point ne peut être apperçu. Dans la *fig.* 40, la courbe *LT* représente cette caustique, et *OMS* est la trajectoire limite, menée de l'œil de l'observateur tangentiellement au sol. Je la nomme *trajectoire limite*, parce qu'elle limite la hauteur où se fait le renversement. Dans la figure citée, tous les points situés au-dessus de cette trajectoire ne peuvent envoyer à l'observateur qu'une seule image ; ceux qui sont dans l'espace *SLT* lui en envoient deux, l'une supérieure qui est droite, l'autre inférieure qui est renversée ; enfin les points situés au-dessous de la caustique, dans l'espace *MLT* ne pouvant en envoyer aucune, sont invisibles ; de sorte qu'un objet mobile, un homme, par exemple, qui s'éloigne successivement à diverses distances, présente les apparences successives rapportées *fig.* 41.

Lorsque la vision se fait ainsi, par des trajectoires convexes vers la terre ou vers la mer, la réfraction est négative; l'horison apparent est beaucoup plus abaissé qu'il ne devrait l'être relativement à la hauteur où l'on observe. Les marins doivent donc se méfier de ce phénomène, qui tendrait à leur donner des erreurs considérables dans leur latitude ; car je trouve, par expérience, que ces erreurs peuvent souvent aller à 4 et 5 minutes. L'horison apparent sera ainsi abaissé quand la mer sera plus chaude que l'air. Au contraire, si elle est plus froide, le décroissement des densités suit une loi beaucoup plus rapide qu'à l'ordinaire, et l'horison apparent s'élève à une hauteur trop considérable. On éviterait ces erreurs en n'observant pas les hauteurs des astres au-dessus de l'horison de la mer, mais au-dessus d'un horison

Digitized by Google

artificiel, placé hors des couches inférieures où se fait toujours la variation extraordinaire de la densité. Mais ce moyen n'est pas toujours facile, et à bord des vaisseaux il est tout-à-fait impraticable à cause du mouvement de la mer. Dans ce cas, on corrigera l'erreur en prenant, s'il est possible, la distance des deux horisons opposés de la mer. L'excès de cette somme sur deux angles droits donnera le double de la dépression apparente de l'horison, qu'il faudra employer dans le calcul. Ainsi on connoîtra cette dépression en prenant la moitié du résultat. Malheureusement, cette observation des deux horisons est très-difficile à faire avec exactitude. Mais s'il n'est pas en notre pouvoir de rectifier l'erreur qui se produit dans ces circonstances, il est du moins utile d'être prévenu de son existence et du sens où elle peut agir, afin de pouvoir s'en défier; et c'est pourquoi j'ai cru devoir dire un mot des résultats précédens.

222. Des causes analogues à celles qui produisent les réfractions atmosphériques occasionnent la scintillation des étoiles fixes et les ondulations de la lumière. L'atmosphère étant toujours plus ou moins agitée, les diverses molécules qui la composent éprouvent des condensations et des dilatations momentanées, qui font sans cesse varier la direction des rayons lumineux, par la diversité des réfractions qu'elles occasionnent. Ces effets sont presque toujours sensibles dans le pays que nous habitons, parce que l'air y est rarement serein; ils le sont moins dans les pays où le ciel est plus pur. Par cette raison, les étoiles fixes, dont le diamètre apparent est fort petit, nous paraissent agitées par une sorte de tremblement. Cela arrive sur-tout aux approches de la pluie, lorsqu'elle succède à une longue sécheresse. Le tremblement des étoiles est alors si remarquable qu'il devient un signal

Digitized by Google

pour les matelots. On conçoit en effet que la condensation plus ou moins irrégulière des vapeurs aqueuses suspendues dans l'air, peut produire des variations locales et passagères de densité et de température qui occasionnent ces mouvemens. Si, dans de semblables circonstances, on observe une étoile avec une lunette à micromètre, lorsqu'on place l'étoile sous le fil, elle oscille de manière à paraître successivement des deux côtés. Ces agitations se succèdent avec tant de vivacité, que l'on serait tenté de croire que le diamètre apparent de l'étoile excède réellement l'épaisseur du fil. Mais ces mouvemens, que nos yeux attribuent aux étoiles, se font réellement dans notre atmosphère. Ils sont quelquefois assez sensibles pour qu'il soit impossible d'observer. On peut encore voir des agitations très-marquées, produites par la même cause, dans les ombres des tours, et dans l'image du soleil projetée sur le sol par une ouverture faite à la voute d'un édifice élevé.

223. On remarque généralement que la scintillation des planètes est beaucoup moindre que celle des fixes. Cela vient de ce que leur disque, quoique fort petit, est encore beaucoup plus grand que celui des étoiles. Alors, les petites déviations accidentelles que ces variations de densité de l'air font subir à leur lumière, ne sont pas assez fortes pour déplacer leur disque en totalité. Elles lui font seulement éprouver, sur ses bords, de petites ondulations; au lieu qu'elles déplacent continuellement les étoiles qui sont comme des points brillans d'une dimension insensible; et c'est ce déplacement qui produit leur scintillation.

224. Par l'effet de la réfraction, les astres doivent devenir visibles avant d'être au-dessus de l'horison. A leur coucher, nous devons les voir encore lorsqu'ils sont déja au-dessous.

Digitized by Google

Par la même raison, on peut voir la lune éclipsée dans l'ombre de la terre, quoique le soleil et elle paraissent tous deux sur l'horison, l'un à l'occident, l'autre à l'orient. Il suffit que ces deux astres soient diamétralement opposés l'un à l'autre, et que l'un d'eux, le soleil, par exemple, se trouve très-peu élevé au-dessus de l'horison. Alors la lune, qui lui est opposée, se trouve très-peu abaissée au-dessous de ce plan, et la réfraction, en l'élevant, parvient à la faire paraître au-dessus. Ce phénomène a été observé à Paris le 19 juillet 1750.

225. C'est encore par un effet de la réfraction atmosphérique que le soleil à l'horison paraît ovale et applati dans le sens vertical; voy. *fig.* 42. Tous les points de son disque sont alors élevés par l'effet de la réfraction, mais ils le sont inégalement : les points inférieurs le sont plus que les supérieurs, parce qu'ils sont plus près de l'horison où la réfraction est plus forte. Le disque du soleil doit donc sembler applati, dans le sens vertical. Sur les hautes montagnes, et sur les hauteurs situées sur les bords de la mer, cet applatissement paraît très-considérable; il va quelquefois jusqu'à un cinquième du diamètre apparent du soleil. Le disque de la lune présente les mêmes phénomènes.

A la vérité, le diamètre horisontal est aussi changé par les mêmes causes. Car la réfraction élevant les points lumineux dans les plans verticaux où ils se trouvent; et tous les plans verticaux se réunissant au zénith, un arc, même horisontal, se trouve par là diminué. Mais cet effet produit uniquement, par la convergence des verticaux, est beaucoup moindre que l'effet direct et vertical de la réfraction. C'est pourquoi l'applatissement vertical du disque est seul apperçu.

Digitized by Google

226. Ceci suppose l'air dans son état ordinaire, où la densité est décroissante de bas en haut. Des phénomènes contraires auraient lieu si la densité des couches inférieures décroissait en approchant de la surface de la terre, comme cela arrive quand la mer est plus chaude que l'air. Alors le disque du soleil, en pénétrant dans ces couches, s'alonge par le bas et présente quelquefois une image renversée. D'autres fois, l'irrégularité des densités multiplie les inflexions du rayon, et l'on voit alors plusieurs images du soleil; ou bien son disque se déforme tellement qu'il devient méconnaissable; on en voit un exemple dans la *fig.* 43, où l'on a réuni diverses apparences, que nous avons observées M. Mathieu et moi, à Dunkerque.

227. Enfin nous nous sommes assurés, par des expériences décisives, que la trajectoire décrite par les rayons lumineux, dans les couches inférieures de l'atmosphère, n'est pas toujours entièrement concave vers la surface terrestre, comme dans la réfraction ordinaire, ou entièrement convexe, comme dans le mirage, mais qu'elle subit quelquefois des inflexions successives dans ces deux sens opposés. De là résultent des dépressions de l'horison apparent qui ne s'accordent pas avec les hauteurs d'où on les observe, des apparitions d'objets éloignés que la rondeur de la terre cache ordinairement, des images doubles, quelquefois triples des objets situés près de l'horison, enfin tous les phénomènes de réfraction extraordinaire qui ont lieu dans les couches inférieures de l'atmosphère, comme je l'ai fait voir dans le Mémoire que j'ai cité plus haut.

228. Il me reste maintenant à montrer comment la seule comparaison des observations astronomiques peut conduire à des résultats exactement conformes à ce que

Digitized by Google

nous venons de conclure des seules données physiques. Cet accord est d'autant plus curieux à connaître, qu'il confirme, par une épreuve faite en grand sur l'atmosphère, les expériences délicates sur lesquelles la théorie des réfractions atmosphériques est fondée.

Pour suivre cette seconde marche, il faut d'abord admettre que, sans l'effet de la réfraction, toutes les étoiles circompolaires devraient donner la même hauteur du pôle. A la vérité, cela ne peut se prouver rigoureusement qu'en dépouillant les observations de l'effet des réfractions qui les altèrent, en sorte que l'admission préalable de cette hypothèse entraîne réellement un cercle vicieux. Mais les différences que l'on trouve entre les hauteurs du pôle données par les différentes étoiles paraîssent tellement liées à leurs hauteurs apparentes, elles sont tellement influencées par les variations de la pression atmosphérique et de la température, qu'il est presque impossible de les attribuer à une autre cause qu'aux réfractions produites par l'atmosphère; et cette supposition se change en certitude lorsque l'on voit tous les phénomènes du mouvement diurne des astres ramenés ainsi à des lois uniformes, constantes, et les plus simples que l'on puisse imaginer.

229. Admettons donc cette hypothèse pour fondement de nos recherches. Si les observations des différentes étoiles ne donnent pas la même hauteur du pôle, l'erreur doit être produite par la réfraction qui affecte chacune d'elles, et qui les affecte inégalement.

Il suit de là d'abord que, si les réfractions vont en décroissant depuis l'horison jusqu'au zénith, comme la constitution de l'atmosphère doit le faire présumer, la loi de leur décroissement n'est pas une progression arithmétique. Car c'est une propriété caractéristique de cette

progression, que deux termes quelconques, pris à égale distance d'un même terme, font toujours la même somme. Par conséquent, si les réfractions décroissaient en progression arithmétique, la demi-somme des hauteurs méridiennes supérieures et inférieures d'une même étoile serait toujours la même quelle que fût l'étoile observée; or, d'après les observations rapportées à la page 91, il est évident que cela n'a pas lieu.

230. En essayant ainsi successivement différentes lois de décroissement, depuis l'horison jusqu'au zénith, on a trouvé, et c'est Bradley qui a fait cette découverte, on a trouvé, dis-je, que les observations s'accordent assez bien en supposant la réfraction proportionnelle à la tangente de la distance apparente de l'astre au zénith.

Puis il remarqua qu'elles s'accordaient mieux encore en substituant à la distance apparente, dans la proportionnalité précédente, cette même distance diminuée d'un certain multiple de la réfraction. Bradley supposa ce multiple égal à 3; il avait été conduit à cette valeur par un grand nombre d'essais. On a vu plus haut que la théorie donne ce multiple égal à 3 et $\frac{1}{4}$. Mais, comme la réfraction est fort petite, la diminution que cette correction produit sur la distance au zénith est très-peu considérable; et les résultats calculés dans les deux suppositions sont déja bien peu différens.

Pour achever de rendre ces résultats rigoureux, il faut les ramener à la même pression et à la même température; car, jusqu'alors, on ne peut les regarder que comme approchés. Mais le coefficient de la réfraction conclu de cette première approximation est déja suffisant pour calculer les réductions des observations à une température moyenne; et le calcul répété de nouveau sur les observations ainsi réduites, donne, avec toute l'exactitude

Digitized by Google

desirable, le coefficient de la réfraction. On le trouve ainsi égal à $187'',24$ de la division décimale, et nous avons vu précédemment que la théorie fondée sur des expériences directes donne exactement la même chose. On ne peut pas desirer un accord plus satisfaisant (*).

231. On peut aussi trouver la valeur de la réfraction terrestre par les observations des distances au zénith *réciproques*, c'est-à-dire, faites dans deux stations qui s'observent réciproquement. Car, soient Z et Z' ces distances observées en O et en O', *fig.* 44, menons les deux tangentes OT, $O'T$ à la trajectoire; on aura évidemment $COT = 180° - Z$; $CO'T = 180° - Z'$. De plus, en nommant, comme ci-dessus, r et r', les deux réfractions cherchées; c'est-à-dire les angles, TOO' et $TO'O$, on a $O''TO' = r + r'$ et $OTO' = 180° - (r + r')$. Or, dans le quadrilatère $COTO'$, formé par les deux tangentes OT; $O'T$, et les deux rayons terrestres CO; CO', la somme des angles intérieurs vaut quatre angles droits. En nommant donc V l'angle de ces deux rayons, ou l'arc terrestre compris entre l'objet et l'observateur, on aura l'égalité

$$180° - Z + 180° - Z' + 180 - (r + r') + V = 360,$$

ce qui donne $r + r' = 180° + V - Z - Z'$

232. La somme des réfractions terrestres étant ainsi connue, il ne reste plus qu'à les séparer. Pour cela on emploie une approximation. On suppose, qu'entre les deux points donnés, la trajectoire se confond sensiblement avec un arc de cercle, ou, ce qui revient au même, on

(*) Les calculs que suppose la méthode précédente, sont développés dans une note à la fin du livre.

Digitized by Google

lui substitue dans cet intervalle la circonférence du cercle qui lui est osculateur. Cette supposition qui serait inexacte en général, suffit dans le cas actuel à cause du peu d'étendue de l'arc décrit par la molécule de lumière, entre l'observateur et l'objet terrestre.

Or, c'est une propriété du cercle que deux tangentes menées d'un même point extérieur, sont également inclinées sur la corde qui joint leurs points de tangence. Ainsi, en regardant la portion OO' de la trajectoire comme un arc de cercle, les deux réfractions terrestres TOO', $TO'O$; ou r et r' seront égales, et en prenant la moitié du second membre de l'équation précédente on aura la valeur de la réfraction terrestre qui sera (*)

$$r = \frac{180^\circ - (Z + Z') + V}{2}.$$

La méthode précédente, uniquement fondée sur les

(*) Pour apprécier jusqu'à quel degré cette approximation est exacte, il faut savoir qu'en supposant le décroissement des densités en progression arithmétique, pour de très-petites hauteurs, comme cela a lieu ordinairement, dans la réfraction terrestre, les courbes décrites par les rayons de lumière, sont des sections coniques dont le centre de la terre occupe un des foyers, et qui arrivent à l'œil de l'observateur sous diverses inclinaisons. Or, d'après la nature des sections coniques, il est impossible que deux tangentes OT, $O'T$, *fig.* 44, soient également inclinées sur la corde qui joint les points de tangence, à moins que le point d'intersection des deux tangentes ne se trouve sur un des axes de la courbe. Cette condition ne saurait être remplie, en général, par toutes les trajectoires lumineuses qui arrivent à l'œil de l'observateur; mais l'erreur croît avec l'étendue de l'arc; et, s'il est très-petit, elle devient tout-à-fait insensible; parce que, sur cette petite étendue, la trajectoire se confond avec le cercle osculateur.

Digitized by Google

observations, conduisant aux mêmes valeurs qui se déduisent de la théorie mathématiqne des réfractions, suppléera jusqu'à un certain point à la connaissance de l'analyse qui sert de base à cette théorie, connaissance que l'on ne peut donner dans un ouvrage élémentaire tel que celui-ci.

Digitized by Google

CHAPITRE XIX.

Des Parallaxes.

233. Les méthodes d'observation que nous avons jusqu'à présent établies, ont eu spécialement pour objet les étoiles fixes, et elles sont toutes fondées sur la considération de leur distance presque infinie, qui permet de supposer que les rayons visuels, menés des différens points de la terre à une même étoile, sont tout-à-fait parallèles. Ce principe ne peut plus être employé pour les corps qui composent notre systême planétaire, parce qu'ils sont beaucoup plus rapprochés de nous, et le point de la terre d'où on les observe n'est plus si fort indifférent. Ainsi, pour compléter ces méthodes, il faut étudier plus particulièrement les effets de ces différences d'aspect, et trouver le moyen d'en corriger l'influence.

234. Lorsque différens observateurs répartis sur la surface de la terre observent un même astre, ils ne le rapportent pas au même point du ciel; car soit L, cet astre *fig.* 45, C le centre de la terre, O, O' les positions des deux observateurs; OL, $O'L$ les rayons visuels menés de leurs yeux à l'astre. Comme on rapporte toujours les objets sur le prolongement de ces rayons, le premier verra l'astre en l sur la sphère céleste, le second le verra en l'. La différence de ces deux résultats dépendra de l'angle OLO', sous lequel on verrait, du centre de l'astre, la corde de l'arc terrestre qui joint les

Digitized by Google

deux observateurs. Cet angle se nomme *la parallaxe*. Pour les étoiles il est absolument insensible ; cela résulte de nos observations, puisque nous avons trouvé que les rayons visuels OL, $O'L$ peuvent être supposés parallèles sans aucune erreur appréciable ; mais la valeur de la parallaxe devient sensible pour le soleil, les planètes, et sur-tout pour la lune, celui de tous les corps célestes qui est le plus rapproché de nous (*).

235. On peut même citer quelques phénomènes qui montrent l'influence de la parallaxe indépendamment d'aucun calcul astronomique. Par exemple, dans la figure précédente, si c'est la lune qui est en L, et que le soleil soit en S, beaucoup plus loin du centre de la terre, les deux observateurs verront en même tems ces deux astres, et appercevront l'intervalle qui les sépare ; mais au point E situé sur la ligne SL qui joint leurs centres, cette distance paraîtra nulle, et le soleil sera éclipsé. Ainsi, lorsqu'un nuage passe entre nous et le soleil, nous nous trouvons plongés dans l'ombre, tandis que des lieux souvent peu éloignés sont éclaires de toute sa lumière : la différence de ces effets est due à une véritable parallaxe.

236. Pour éviter les irregularites dependantes de ces différens aspects, et rendre toutes les observations com-

(*) C'était réellement la recherche de cette parallaxe que nous faisions dans le chapitre VIII, lorsque nous comparions les hauteurs méridiennes moyennes des étoiles circompolaires observées en des lieux différens. Puisque l'axe de rotation de la sphère des fixes semble toujours passer par l'œil de l'observateur, comme nous l'avons reconnu alors, il faut que l'angle sous lequel la terre entière paraîtrait, si elle était vue des étoiles, soit insensible, ou en d'autres termes, que la parallaxe des étoiles soit nulle.

parables, les astronomes sont convenus de les rapporter au centre de la terre supposée sphérique ou sphéroïdique, et ils regardent comme le *lieu vrai* des astres sur la sphère céleste celui où on les verrait, s'ils étaient observés de ce point. Par opposition ils appellent *lieu apparent* d'un astre le point de la sphère céleste auquel on le rapporte, quand on l'observe de dessus la surface de la terre.

237. Pour plus de simplicité commençons par examiner le cas où la terre serait sphérique, et voyons comment on peut trouver le lieu vrai quand on connaît le lieu apparent. Dans cette supposition, soit *fig.* 46, *C* le centre de la terre, et soit *O* la position de l'observateur sur sa surface : le rayon *CO* prolongé sera la verticale. Maintenant si l'observateur mesure la distance de l'astre au zénith, il la trouvera égale à l'angle *LOZ* ; s'il l'eût observée du centre de la terre, il l'aurait trouvée égale à *LCZ* ou à *LOZ* — *CLO*, parce que l'angle *LOZ* est extérieur au triangle *LOC*. L'angle *CLO*, formé par les deux rayons visuels menés à l'astre, se nomme la *parallaxe de hauteur* : *en la retranchant de la distance zénithale apparente, on aura la distance vraie.* Nous supposons d'ailleurs que l'on ait préalablement fait à la distance observée la correction que la réfraction exige.

238. Les deux rayons visuels *OL*, *CL* étant compris dans le même plan vertical, on voit que l'effet de la parallaxe se porte tout entier dans le sens vertical, comme celui de la réfraction ; mais la parallaxe est soustractive de la distance au zénith, au lieu que la réfraction est additive. L'effet de la parallaxe de hauteur est donc d'abaisser les astres dans les verticaux où ils se trouvent, ce qui est le contraire de la réfraction, qui les fait paraître trop élevés.

Digitized by Google

239. Cet abaissement dépendant du calcul de l'angle OLC n'est pas le même pour toutes les hauteurs. La distance de l'astre à la terre étant supposée constante, il est le plus grand possible à l'horison, comme en $OL'C$ *fig.* 47. L'angle $OL'C$ se nomme la *parallaxe horisontale.* Si du point L' on mène deux tangentes au cercle OO', qui représente le contour de la terre, la parallaxe horisontale sera la moitié de l'angle visuel $OL'O'$, sous lequel la terre serait apperçue par un observateur placé dans l'astre, ou ce qui revient au même, ce sera, pour cet observateur, la moitié du diamètre apparent de la terre.

La parallaxe de hauteur, ou l'angle OLC, diminue à mesure que l'astre s'élève sur l'horison; enfin, elle devient nulle lorsqu'il arrive au zénith, parce que le rayon visuel mené du centre de la terre, se confond avec le rayon visuel de l'observateur. La loi de cette diminution est facile à calculer par les règles de la trigonométrie, et en supposant que la distance de l'astre au centre de la terre ne varie pas sensiblement dans l'intervalle d'une révolution diurne, on trouve que *la parallaxe correspondante à une hauteur apparente quelconque, est égale au produit de la parallaxe horisontale par le sinus de la distance apparente au zénith* (*).

(*) Pour démontrer cette relation, soit *fig.* 47, D la distance de l'astre au centre de la terre, distance que nous supposerons constante pendant le tems que l'astre emploie pour s'élever de l'horison jusqu'à sa plus grande hauteur; soit R le rayon terrestre; COZ la verticale; Z la distance au zénith, ou l'angle LOZ, et π la parallaxe de hauteur, ou l'angle OLC. Cela posé, dans le triangle LOC, les sinus des angles seront proportionnels aux côtés opposés, ce qui donnera

$$\sin \pi = \frac{R.\sin Z}{D}.$$

240. Tout se réduit donc à déterminer la parallaxe horisontale. Or, la seule inspection du triangle $OL'C$ montre que le sinus de cette parallaxe est égal à $\frac{CO}{CL'}$ ou à $\frac{R}{D}$, en nommant R le rayon terrestre mené à l'observateur, et D la distance de l'astre au centre de la terre. Si l'on pouvait mesurer cette distance, comme on

---

Supposons maintenant l'astre à l'horison, la distance au zénith étant égale à 90 degrés ou à 100 grades, on a $\sin Z = 1$, et en nommant Π la valeur que prend alors ϖ, c'est-à-dire, la *parallaxe horisontale*, la formule précédente donne

$$\sin \Pi = \frac{R}{D};$$

c'est le rapport des sinus aux côtés opposés dans le triangle $L'OC$, dont le côté OL' est horisontal, et tangent à la terre en O. Comme le sinus d'un angle est toujours une fraction moindre que l'unité, le produit de $\frac{R}{D}$, par $\sin Z$, ou la parallaxe de hauteur, sera toujours moindre que $\frac{R}{D}$, qui est la parallaxe horisontale. La *parallaxe horisontale est donc la plus grande de toutes.* Si l'on élimine D entre les deux équations précédentes, on obtient

$$\sin \varpi = \sin \Pi \,.\, \sin Z;$$

le grand éloignement des corps célestes fait que Π et ϖ sont toujours de très-petits angles, même pour la lune, dont la parallaxe horisontale ne surpasse pas 1° sexagésimal. Or, pour des angles aussi petits, le rapport des arcs est, à fort peu près, égal à celui des sinus; ainsi, en substituant $\frac{\varpi}{\Pi}$ à $\frac{\sin \varpi}{\sin \Pi}$ dans la relation précédente, on aura

$$\varpi = \Pi \,.\, \sin Z$$

c'est-à-dire, que la parallaxe de hauteur est égale à la parat-

Digitized by Google

à la longueur du rayon terrestre, la parallaxe serait connue complètement.

Pour cela le procédé le plus simple et le plus naturel est celui que l'on emploie dans la trigonométrie pour mesurer l'éloignement d'un objet inaccessible, en l'observant des deux extrémités d'une base connue. Deux observateurs OO', *fig.* 48, situés sous le même méridien céleste, à des distances connues, observent en même tems la hauteur

---

laxe horisontale multipliée par le sinus de la distance au zénith. A la rigueur, ce rapport a lieu entre les sinus des parallaxes ; mais pour juger combien la substitution des arcs est approchée, il suffit de remarquer que le sinus de 1° sexagésimal est égal à 0,01745240, et sa tangente à 0,01745507, le rayon étant pris pour unité. Maintenant, comme l'arc est toujours plus petit que sa tangente, et plus grand que son sinus, il est compris entre les deux expressions précédentes, et, par conséquent, il diffère de l'une quelconque de ces deux valeurs, moins que ces deux valeurs ne diffèrent entre elles ; l'erreur que l'on commet en substituant l'arc au sinus, dans cette circonstance, est donc moindre que 0,00000267, qui, divisé par 0,01745240, fait environ $\frac{1}{6536}$ de la valeur totale de l'arc.

D'après l'expression précédente de sin ϖ, on voit que la parallaxe d'un astre peut se calculer pour toutes les hauteurs, quand on connaît sa distance au centre de la terre exprimée en parties du rayon terrestre, ou le rapport $\frac{R}{D}$; réciproquement, on peut calculer la distance quand on connaît la parallaxe par observation.

Connaissant la parallaxe de hauteur par la formule précédente, si l'on nomme Z'' la distance *vraie* au zénith, telle qu'on l'observerait du centre de la terre, on a

$$\sin \varpi = \sin \Pi \,.\, \sin Z, \qquad Z'' = Z - \varpi.$$

Ces formules supposent Z connu. Dans les tables astronomiques, qui sont construites sur les lieux vrais, c'est Z'' qui est supposé connu, et il faut en déduire Z afin de trouver le lieu apparent. Pour cela, on

Digitized by Google

méridienne de l'astre L, ou sa distance au zénith. Alors dans le quadrilatère $LOCO'$ on connaît les trois angles O, O' et C; ce dernier étant formé par les deux verticales des observateurs. On a de plus les longueurs des côtés OC, $O'C$, qui sont des rayons terrestres. On peut donc construire le quadrilatère, et calculer la diagonale CL, qui est la distance de l'astre au centre de la terre. Le rayon terrestre, divisé par cette distance, sera le sinus de la parallaxe horisontale.

---

doit exprimer la parallaxe ϖ en fonction de Z'' : cela est facile, car puisque $Z = Z'' + \varpi$, en éliminant Z, on aura

$$\sin \varpi = \sin \Pi \,.\, \sin \left\{ Z'' + \varpi \right\} = \sin \Pi \left\{ \sin Z'' \cos \varpi + \cos Z'' \sin \varpi \right\},$$

d'où l'on tire

$$\operatorname{tang} \varpi = \frac{\sin \Pi \,.\, \sin Z''}{1 - \sin \Pi \cos Z''}.$$

Comme la parallaxe horisontale Π est toujours un très-petit arc, cette expression peut se réduire en une série convergente, ordonnée suivant les puissances de $\sin \Pi$; il ne faut, pour cela, qu'effectuer la division indiquée, et l'on a

$$\operatorname{tang} \varpi = \sin \Pi \,.\, \sin Z'' + \frac{\sin^2 \Pi \,.\, \sin 2 Z''}{2} + \text{etc.}$$

mais ces deux premiers termes suffiront toujours.

Au reste, si l'on voulait obtenir rigoureusement la valeur de ϖ, on le pourrait aisément au moyen d'un angle auxiliaire φ, tel qu'on eût

$$\cos \varphi = \sqrt{\sin \Pi \cos Z''},$$

ce qui donne

$$\operatorname{tang} \varpi = \frac{\sin \Pi \,.\, \sin Z''}{\sin^2 \varphi};$$

formule à laquelle on peut appliquer le calcul logarithmique.

Digitized by Google

Cette méthode, réduite en calcul, conduit au résultat suivant, qui est d'une extrême simplicité. *La parallaxe horisontale est égale à l'angle à l'astre divisé par la somme des sinus des distances zénithales, si l'astre se trouve entre les zéniths des deux observateurs, ou par les différences de ces sinus, si l'astre se trouve du même côté du zénith par rapport à tous deux* (*).

(*) Le calcul qui conduit à ce résultat est très-simple. Considérons le cas de la *fig.* 48. Soit ϖ la parallaxe de hauteur pour l'observateur placé en O, laquelle est égale à l'angle OLC; soit de même ϖ' l'angle $O'LC$, ou la parallaxe de hauteur pour l'observateur placé en O'; enfin, soit Π la parallaxe horisontale du même astre, laquelle sera la même pour les deux observateurs, dans le cas de la terre sphérique. Cela posé, si l'on nomme Z, Z' les deux distances au zénith observées en O et en O', on aura, par ce qui précède,

$$\varpi = \Pi \sin Z\,; \qquad \varpi' = \Pi \sin Z'\,;$$

ce qui donne dans le cas de la *fig.* 48.

$$\varpi + \varpi' = \Pi \left\{ \sin Z + \sin Z' \right\}$$

Or, $\varpi + \varpi'$ n'est autre chose que l'angle OLO', sous lequel on verrait, du centre de l'astre, la corde de l'arc terrestre qui joint les deux observateurs, et cet angle étant le quatrième dans le quadrilatère $COLO'$, est facile à calculer; en effet, l'angle en O est égal à $180° - Z$, l'angle en O' à $180° - Z'$; soit φ l'angle au centre de la terre, compris entre les verticales des deux observateurs, lequel est connu d'après leurs latitudes; la somme des quatre angles du quadrilatère devant être égale à quatre angles droits, on aura en employant la division sexagésimale du cercle

$$\varphi + 180° - Z + 180° - Z' + OLO' = 360°,$$

par conséquent,

$$OLO' = Z + Z' - \varphi\,,$$

et puisque cet angle OLO' est égal à $\varpi + \varpi'$, on aura, en égalant

241. Il est bon de remarquer que l'angle OLO', ou l'angle à l'astre, peut se conclure immédiatement des différences de déclinaison observées entre une même étoile et l'astre, et c'est même ainsi qu'en ont usé les astronomes, parce que ces différences peuvent aisément s'observer avec une très-grande exactitude. Pour exposer ce procédé, soit λ une étoile qui passe au méridien en

---

ces deux valeurs,

$$\Pi = \frac{Z + Z' - \varphi}{\sin Z + \sin Z'};$$

dans le cas où l'astre serait du même côté du zénith, par rapport aux deux observateurs, comme dans la *fig.* 49, le raisonnement serait tout-à-fait analogue, seulement l'angle OLO' ne serait plus $\varpi' + \varpi$; mais $\varpi' - \varpi$, ou $\Pi \left\{ \sin Z' - \sin Z \right\}$, ϖ' étant la plus grande des deux parallaxes, on aurait de plus dans le triangle OKO'',

$$Z + OLO' + 180 - Z' + \varphi = 180^\circ,$$

ce qui donne

$$OLO' = Z' - Z - \varphi,$$

tout se réduirait donc à faire Z négatif, ainsi que $\sin Z$ dans la valeur précédente de Π. Cette formule, où tout est connu, donnera la valeur de la parallaxe horisontale de l'astre; on aura ensuite la distance par la formule

$$\sin \Pi = \frac{R}{D},$$

qui donne

$$D = \frac{R}{\sin \Pi}.$$

L'angle OLO', ou $Z + Z' - \varphi$, peut aussi se conclure immédiatement des différences de déclinaisons observées entre l'astre et une étoile fixe, comme on le dit dans le texte.

On verra dans le même article que la parallaxe de Mars a été trouvée par cette méthode de 24″,64 sexagésimales, on aura donc pour Mars

$$\sin \Pi = 0{,}000119458 = \frac{1}{8371{,}15},$$

Digitized by Google

même tems que l'astre, voyez *fig.* 50, et par les deux observateurs, menons à cette étoile deux rayons visuels qui pourront être censés parallèles, puisque la parallaxe des étoiles est insensible. Cela posé, les angles $LO\lambda$, $LO'\lambda$, seront évidemment les différences de déclinaison observées, et l'angle OLO' étant extérieur au triangle LOS, sera égal à la *somme* de ces différences. Si l'astre était du même côté du zénith, par rapport aux deux observateurs, l'angle OLO' serait égal à la différence des angles en O et O'.

---

et par suite,

$$D = \frac{R}{\sin \Pi} = R \,.\, 8371.15,$$

c'est-à-dire que la distance de Mars à la terre était alors égale 8371 rayons terrestres et $\frac{15}{100}$.

On aurait même pu calculer la valeur de D sans le secours des tables de sinus, car l'angle Π étant fort petit, on peut le substituer à son sinus, sans une erreur notable; mais alors, pour rétablir l'homogénéité, il faut convertir le rayon, qui est ici pris pour unité, en parties de même nature que Π, c'est-à-dire, en secondes sexagésimales. Or, la valeur du rayon, ainsi réduite, est 206264″,8 comme on peut le voir, dans les tables de logarithmes; on aura donc ainsi

$$D = R\,\frac{206264'',8}{\Pi},$$

et dans le cas actuel,

$$D = 8371,15 \,.\, R.$$

Cette conversion du rayon en secondes s'emploie très-fréquemment en astronomie, et l'on conçoit, en effet, qu'elle doit revenir toutes les fois qu'on substitue un petit arc à son sinus; c'est pourquoi j'ai saisi cette occasion d'en donner ici un exemple. On verra plus loin, le calcul de la parallaxe horisontale, en ayant égard à l'applatissement de la terre.

Digitized by Google

Nous avons supposé que l'étoile passe en même tems que l'astre au méridien. Cela est utile pour l'exposé de la méthode, mais cela n'est nullement nécessaire dans la pratique ; car si l'étoile passe avant ou après l'astre, on peut toujours observer séparément leur déclinaison et en prendre la différence. Seulement on choisit des étoiles très-voisines du parallèle de l'astre, afin que, sans déranger la lunette, on puisse y observer le passage de tous les deux, et prendre alors leur différence de déclinaison, avec un simple micromètre, comme on prend le diamètre d'une planète ; en effet l'opération peut se faire avec une très-grande exactitude, parce qu'elle est indépendante de toutes les causes d'erreurs qui peuvent affecter les hauteurs absolues, et qu'elle suppose seulement que les intervalles des divisions de l'instrument sont exactes dans l'étendue très-petite que l'on fait parcourir au fil horisontal ; condition qu'il est très-ordinaire de voir réalisée dans les instrumens construits par d'habiles artistes.

Prenons, pour exemple, les observations de Wargentin et de Lacaille sur la parallaxe de Mars : ils comparaient cette planète à l'étoile λ, de la constellation du Verseau. Mars étant dans le méridien du cap de Bonne-Espérance, Lacaille trouva que le bord boréal de son disque était plus septentrional que l'étoile de $26'',7$; sa distance au zénith était $25°.2'$, en se bornant aux minutes. Au même instant et sous le même méridien, Wargentin, à Stockolm, observait Mars, au méridien, à $68°.14'$ de distance zénithale ; le bord septentrional de son disque était plus austral que l'étoile de $6'',6$; l'angle à l'astre était donc alors $26'',7 + 6'',6$ ou $33'',3$. Or, le sinus de $68°.14'$ est 0,9287, celui de $25°.2'$ est 0,4231, et leur somme est 1,3518. C'est le dénominateur de notre for-

Digitized by Google

mule, qui donne ainsi $P = \frac{33'',3}{1,3518} = 24'',64$; valeur de la parallaxe horisontale de Mars à l'instant des observations. On voit que le numérateur de cette expression, ou l'angle OLO', étant fort petit, il n'est pas nécessaire d'avoir, avec la dernière rigueur, les valeurs des sinus des distances zénithales, ni, par conséquent, ces distances zénithales elles-mêmes ; c'est en cela que consiste l'avantage de cette méthode.

242. Si l'on divise l'unité par le sinus de la parallaxe horisontale, le quotient sera la distance de l'astre à la terre, exprimée en rayons terrestres. car $D = \frac{R}{\sin \Pi}$. D'après les résultats que nous venons de rapporter, la distance de Mars à la terre, à l'instant des observations, était égale à 8373 rayons terrestres.

243. La condition que les deux observateurs se trouvent exactement sous le même méridien, semble limiter beaucoup l'emploi de cette méthode ; mais on peut aisément l'éluder. D'abord, elle ne serait pas du tout nécessaire, si l'astre que l'on observe n'avait point de mouvement en déclinaison, puisqu'alors sa hauteur méridienne serait la même, pour tous les points situés sur le même parallèle terrestre. Seulement un des observateurs verrait le passage après l'autre ; mais la distance au zénith, mesurée par le second, par exemple, pourrait toujours être considérée comme ayant été observée à pareille latitude, sous le méridien du premier. La chose n'est pas tout-à-fait aussi simple si la déclinaison est variable, parce qu'alors elle change nécessairement un peu dans le tems que l'astre emploie pour passer d'un méridien à l'autre. Mais il est bien facile de remédier à cet inconvénient, en observant

Digitized by Google

plusieurs jours de suite la hauteur méridienne de l'astre. Car les différences successives de ces hauteurs faisant connaître le changement diurne de la déclinaison, on peut en conclure, avec beaucoup d'exactitude, la petite variation qu'elle doit éprouver pendant le tems qui s'écoule dans le passage d'un méridien à l'autre. Au moyen de cette correction, les deux observations peuvent se réduire au même méridien, et la parallaxe s'en conclut, comme nous l'avons dit plus haut. Pour rendre l'application de la méthode plus exacte, on tâche de diminuer les corrections autant que possible. A cet effet on choisit des méridiens peu différens, et on observe l'astre quand il est dans ses plus grandes déclinaisons, parce qu'alors le mouvement en déclinaison est moindre que dans toute autre circonstance. Nous en verrons la raison plus tard, mais nous pouvons, dès à présent, adopter ce fait comme un résultat d'observation.

244. C'est par une méthode toute semblable, que la parallaxe de la lune a été déterminée, en comparant les observations de Lacaille, au cap de Bonne-Espérance, et celles de Lalande, à Berlin. La distance de la lune que l'on en a déduite est à-peu-près égale à 60 rayons terrestres, d'où l'on voit que la lune est bien plus rapprochée de nous que Mars. La distance de la lune à la terre étant très-variable, sa parallaxe est sujète à des changemens considérables, dont la mesure a beaucoup exercé les astronomes, et ils ont employé des procédés très-divers pour la déterminer avec la dernière précision; mais comme la plupart de ces procédés supposaient une connaissance déja très-approfondie des mouvemens de la lune, nous nous bornerons, pour le moment, à la méthode précédente, qui peut être considérée comme la base de toutes les autres.

Digitized by Google

245. La parallaxe des astres ne fait pas seulement connaître leur distance à la terre. Comparée à leurs diamètres apparens, elle fait connaître aussi leurs volumes. *Si l'on divise le diamètre apparent d'un astre par le double de sa parallaxe horisontale, on a, en le supposant sphérique, le rapport de son rayon au rayon de la terre.* Car le double de la parallaxe n'est autre chose que le diamètre apparent de la terre, supposée sphérique, pour un observateur qui serait placé au centre de l'astre, § 239; et, à distances égales, les dimensions réelles des corps sont proportionnelles à leurs diamètres apparens. Ce théorême nous sera utile par la suite pour comparer les dimensions des corps planétaires à celles de notre globe (*).

(*) Soit, *fig.* 51, C le centre de la terre, C' celui de l'astre. Nommons toujours Π la parallaxe horisontale de l'astre ou l'angle $OC'C$, D sa distance CC', au centre de la terre, on aura, par ce qui précède,

$$\sin \Pi = \frac{R}{D}.$$

2Π est le diamètre apparent de la terre pour un observateur placé dans l'astre; réciproquement, le diamètre apparent de l'astre, vu de la terre, n'est autre chose que l'angle $O''CO'''$; c'est-à-dire, que le double de la parallaxe horisontale de la terre, relativement à ce même observateur. Soit donc R' le rayon de l'astre, supposé sphérique, et Δ son diamètre apparent observé, on aura également

$$\sin \tfrac{1}{2} \Delta = \frac{R'}{D};$$

ceci s'accorde avec ce que l'on a vu dans la note de la page 186. En divisant les deux équations précédentes l'une par l'autre, on en tire

$$\frac{\sin \frac{1}{2} \Delta}{\sin \Pi} = \frac{R'}{R};$$

246. La parallaxe abaissant le lieu vrai des astres, n'altère pas seulement leur hauteur, elle altère aussi leur angle horaire et leur distance au pôle. Les changemens qu'elle produit sur ces deux élémens, forment ce qu'on appelle la *parallaxe d'ascension droite*, et la *parallaxe de déclinaison*; mais on peut aisément les déduire de la parallaxe de hauteur.

247. En effet, si, par l'œil de l'observateur, on mène trois rayons visuels OP, OZ, OL, au zénith, à l'astre et au pôle, ces trois lignes prolongées indéfiniment, formeront, sur la sphère céleste, un triangle sphérique PZS, entre les élémens du lieu apparent de l'astre, *voy.* fig. 52. Maintenant, si, du centre de la terre, on mène aux mêmes points trois autres rayons visuels CP, CZ, CL, les deux premiers étant parallèles à OP et à OZ, à cause de l'éloignement infini des étoiles, pourront être considérés comme rencontrant la sphère céleste aux mêmes points P et Z; c'est-à-dire que l'angle OLC pourra être considéré comme nul. Mais le troisième rayon CL, s'écartant sensiblement de OL à cause de la parallaxe de l'astre, ira rencontrer la sphère céleste en un point S' différent de S. De là résultera un nouveau triangle sphérique PZS', entre les lieux vrais; ces deux triangles auront de commun l'arc PZ, distance du

---

ou en substituant au rapport des arcs, celui de leurs sinus, ce qui suffira, puisque les arcs sont fort petits,

$$\frac{\Delta}{2\Pi} = \frac{R'}{R},$$

ce qui est le théorème énoncé dans le texte. On connaîtra donc ainsi le rapport du rayon de l'astre au rayon de la terre, et en cubant ce rapport, on aura $\frac{R'^3}{R^3}$ pour celui de leurs volumes.

Digitized by Google

zénith au pôle, ou complément de la latitude, et l'angle PZS, égal à l'azimuth de l'astre compté du pôle; car les arcs ZS', ZS, qui sont les distances vraies et apparentes, étant comprises dans le même plan vertical, l'azimuth PZS ou l'angle dièdre que forme le méridien avec ce vertical, est le même pour les lieux apparens et pour les lieux vrais. Or, puisque la parallaxe de hauteur SS' est déterminée par ce qui précède, en fonction de la parallaxe horisontale et de la distance au zénith, il s'ensuit qu'un des deux triangles PZS, PZS' étant donné, l'autre est déterminé complètement. En effet, on peut les déduire l'un de l'autre par le calcul trigonométrique, et c'est ainsi que l'on obtient les parallaxes de déclinaison et d'ascension droite (*).

(*) Pour trouver ces corrections, considérons successivement nos deux triangles sphériques; soit Z la distance apparente au zénith, ou ZS; Δ la distance polaire apparente, ou PS; P l'angle horaire apparent, ou l'angle ZPS; A l'azimuth de l'astre, ou l'angle PZS. PZ, troisième côté du triangle, sera la distance du zénith au pôle, ou le complément de la latitude; nous la représenterons par D: cela posé, d'après les formules de la trigonométrie sphérique, l'angle P pourra être exprimé en fonctions des côtés du triangle et de l'azimuth, car on aura

$$\cot P = \frac{\cot . Z . \sin D - \cos A \cos D}{\sin A}.$$

Nommons Z', Δ', P', les quantités analogues dans le triangle ZPS', entre les lieux vrais, on aura de même

$$\cot . P' = \frac{\cot . Z' \sin D - \cos A . \cos D}{\sin A};$$

car l'azimuth et la distance du pôle au zénith restent les mêmes pour les deux triangles; retranchant ces deux équations l'une de l'autre, on trouve

248. Les valeurs de ces réductions sont nécessaires dans une infinité de circonstances, par exemple, lorsque

---

$$\cot.P - \cot.P' = \frac{\left\{\cot.Z - \cot.Z'\right\}.\sin D}{\sin A}$$

En substituant aux cotangentes leur expression trigonométrique $\frac{\cos}{\sin}$, et réduisant au même dénominateur, on en tire

$$\sin\left\{P - P'\right\} = \frac{\sin\left\{Z - Z'\right\}.\sin D.\sin P.\sin P'}{\sin A \sin Z.\sin Z'} :$$

$Z - Z'$ est justement la parallaxe de hauteur ϖ, dont le sinus est égal à $\sin \Pi.\sin Z$, Π étant la parallaxe horisontale; substituant cette valeur, on a

$$\sin\left\{P - P'\right\} = \frac{\sin \Pi.\sin D.\sin P.\sin P'}{\sin A \sin Z'}.$$

Pour faciliter l'usage de cette formule, il est avantageux d'en éliminer l'azimuth A que l'on n'observe pas ordinairement, et qui n'a servi qu'à lier nos deux triangles. On peut aisément y parvenir; car dans tout triangle sphérique, les sinus des angles sont proportionnels aux sinus des côtés opposés. Ainsi, dans notre triangle ZPS' entre les lieux vrais, le rapport $\frac{\sin P'}{\sin A}$ est égal à $\frac{\sin Z'}{\sin \Delta'}$; Δ' étant la distance polaire vraie; on a donc, par la substitution de cette valeur,

$$\sin\left\{P - P'\right\} = \frac{\sin \Pi.\sin D.\sin P}{\sin \Delta'}.$$

$P - P'$ est la différence de l'angle horaire vrai à l'angle horaire apparent. C'est justement ce que l'on nomme *la parallaxe d'ascension droite;* si nous la représentons par α, nous aurons $P = P' + \alpha$, et en éliminant P, il viendra

$$\sin \alpha = \frac{\sin \Pi.\sin D.\sin\left\{P' + \alpha\right\}}{\sin \Delta'};$$

Digitized by Google

l'on observe les différences de déclinaison et d'ascension de la lune et d'une étoile avec la machine parallactique; elles sont indispensables dans le calcul des éclipses et dans

---

et en développant $\sin(P' + \alpha)$, on en tire

$$\tang \alpha = \frac{\dfrac{\sin \Pi . \sin D . \sin P'}{\sin \Delta'}}{1 - \dfrac{\sin \Pi . \sin D}{\sin \Delta'} . \cos P'}.$$

Cette formule est absolument analogue à celle de la parallaxe de hauteur, page 246; elle peut se développer en série de la même manière, et en se bornant aux deux premiers termes, qui suffiront toujours, on aura

$$\tang \alpha = \frac{\sin \Pi . \sin D . \sin P'}{\sin \Delta'} + \frac{\sin^2 \Pi . \sin^2 D}{2 . \sin^2 \Delta'} . \sin 2 P' . + \text{etc.}$$

On pourra même fort souvent négliger le second terme, et alors en substituant le rapport $\frac{\alpha}{\Pi}$ à $\frac{\tang \alpha}{\sin \Pi}$, on aura, par approximation,

$$\text{Parallaxe d'ascension droite} = \frac{\Pi . \sin D . \sin P'}{\sin \Delta'};$$

enfin, on pourrait encore trouver rigoureusement la valeur de tang. α, par une transformation analogue à celle de la page 246, au moyen d'un angle auxiliaire φ, tel qu'on ait

$$\cos \varphi = \sqrt{\frac{\sin \Pi . \sin D . \cos P'}{\sin \Delta'}},$$

ce qui donne

$$\tang \alpha = \frac{\sin \Pi . \sin D . \sin P'}{\sin \Delta' . \sin^2 \varphi}.$$

Toutes ces formules donnant la parallaxe par le moyen des lieux

Digitized by Google

les occultations d'étoiles. Enfin elles servent aussi pour trouver les distances vraies de la lune aux étoiles, dans la détermination des longitudes. Il est en effet évident

---

vrais, sont accommodés à l'usage des tables astronomiques; elles s'accordent à faire voir que la parallaxe d'ascension droite est nulle au méridien où P' est nul.

La parallaxe de déclinaison se trouve, par un calcul analogue, en comparant les distances polaires dans nos deux triangles; en effet, si l'on nomme A l'azimuth SZP compté du pôle, on peut exprimer les distances polaires Δ; Δ'; en fonction de A, de la distance D du pôle au zénith, et de l'angle horaire vrai ou apparent. Nous aurons alors

$$\cot\Delta = \frac{\cot A.\sin P + \cos P \cos D}{\sin D}, \quad \cot\Delta' = \frac{\cot A.\sin P' + \cos P' \cos D}{\sin D},$$

retranchant ces deux équations l'une de l'autre, on en tire

$$\sin\left\{\Delta - \Delta'\right\} = -\frac{\sin\Delta.\sin\Delta'}{\sin D}.\left\{\cot.A.(\sin P - \sin P') + \cos D\left\{\cos P - \cos P'\right\}\right\}$$

Maintenant que l'azimuth a été employé comme constant, nous pouvons l'éliminer en substituant sa valeur dans le triangle vrai, d'après la formule

$$\cot.A. = \frac{\cot.\ \Delta' \sin D - \cos P' \cos D}{\sin P'},$$

qui est identique avec celles dont nous sommes partis, et qui a lieu dans un triangle sphérique où l'on connaît deux côtés Δ' et D, avec l'angle compris P'; à l'aide de cette expression, la formule précédente devient

$$\sin\left\{\Delta - \Delta'\right\} = \sin\Delta\left\{\frac{\sin\Delta'.\cos D.\sin\left\{P - P'\right\}}{\sin D \sin P'} - \frac{2\cos\Delta'.\cos\frac{1}{2}\left\{P + P'\right\}.\sin\frac{1}{2}\left\{P - P'\right\}}{\sin P'}\right\}.$$

Nous avons nommé α la parallaxe d'ascension droite $P - P'$; nommons δ la parallaxe de déclinaison $\Delta - \Delta'$; nous aurons $\Delta = \Delta' + \delta$, de même que nous avons eu $P = P' + \alpha$; et d'après cela, la formule devient

Digitized by Google

que la parallaxe altère tous ces élémens, mais il est toujours facile de trouver, par la trigonométrie sphérique, les variations qu'ils éprouvent, d'après la connaissance de la

---

$$\sin \delta = \left\{ \frac{\sin \Delta' \cos D . \sin \alpha}{\sin D \sin P'} - \frac{2 \cos \Delta' . \cos (P' + \frac{1}{2} \alpha) \sin \frac{1}{2} \alpha}{\sin P'} \right\} \sin \left\{ \Delta' + \delta \right\};$$

en substituant, dans le premier terme, pour $\sin \alpha$ sa valeur.... $\frac{\sin \Pi . \sin D . \sin . (P' + \alpha)}{\sin \Delta'}$, ce qui le simplifiera un peu, nous aurons

$$\sin \delta = \left\{ \frac{\sin \Pi \cos D . \sin (P' + \alpha) - 2 \cos \Delta' . \cos (P' + \frac{1}{2} \alpha) . \sin \frac{1}{2} \alpha}{\sin P'} \right\} \sin (\Delta' + \delta).$$

Le coefficient compris entre les parenthèses ne dépend que des lieux vrais, et sera connu tout entier dès que l'on aura calculé la parallaxe d'ascension droite; en le représentant par Q, la formule précédente deviendra

$$\sin \delta = Q \sin \left\{ \Delta' + \delta \right\}.$$

Elle est donc encore analogue à celle qui nous a donné la parallaxe de hauteur, ainsi que la parallaxe d'ascension droite; elle se résoudra donc de la même manière, soit exactement, au moyen d'un angle auxiliaire, soit approximativement, au moyen de la série

$$\text{tang}\, \delta = Q \sin \Delta' + \frac{Q^2}{2} \cdot \sin 2 \Delta' + \text{etc.};$$

Dans les applications on pourra toujours, sans erreur sensible, substituer les rapports des arcs α, δ, et Π à celui de leurs sinus et de leurs tangentes; ce qui revient à négliger les cubes des parallaxes. Alors on pourra substituer à $\frac{1}{2} \alpha$, la valeur $\frac{1}{2} \frac{\Pi \sin D . \sin (P' + \alpha)}{\sin \Delta'}$.

Enfin si l'on se borne à la première puissance des parallaxes, ce qui suffira presque toujours, on pourra faire α et δ nuls dans les termes du second membre, qui sont déja multipliés par Π, et alors il vient

$$\text{Parallaxe de déclinaison} = \Pi \left\{ \sin \Delta' \cos D - \cos \Delta' \sin D \cos P' \right\}.$$

Digitized by Google

parallaxe de hauteur, puisque celle-ci fixe et détermine la position vraie de l'astre, sur la sphère céleste ; c'est pourquoi nous remettrons ces divers calculs à l'époque où ils nous deviendront nécessaires, et il nous suffira ici d'avoir énoncé le principe.

249. Jusqu'ici nous avons supposé la terre sphérique. Dans ce cas, la parallaxe horisontale d'un astre, placé à une distance constante, est la même pour tous les observateurs, quelle que soit leur position sur la surface terrestre. Mais ce résultat n'a plus lieu si les rayons terrestres sont inégaux, car la parallaxe horisontale est l'angle sous lequel on verrait, du centre de l'astre, le rayon terrestre qui correspond à chaque observateur. Ainsi, deux questions importantes se présentent : l'ellipticité de la terre a-t-elle, sur les parallaxes, une influence sensible? Comment peut-on y avoir égard?

La réponse à ces deux questions est facile. Nous avons trouvé précédemment que le sinus de la parallaxe horisontale est égal au rayon terrestre divisé par la distance de l'astre au centre de la terre. Si cette distance est constante, mais que les rayons terrestres soient inégaux, les sinus des parallaxes horisontales seront entre eux comme les rayons correspondans, et ces parallaxes elles-mêmes étant de très-petits angles, seront aussi, à fort peu près, dans le même rapport ; la parallaxe équatoriale surpassera donc la parallaxe polaire d'une quantité égale à $\frac{1}{305}$ de sa valeur totale, comme le rayon de l'équateur surpasse le rayon du pôle (*).

(*) Soit, en général, Π' la parallaxe horisontale d'un astre à l'équateur, Π cette parallaxe à la latitude L ; en nommant D la distance de l'astre, A le rayon de l'équateur, et R le rayon terrestre à la latitude L, on aura

Digitized by Google

La plus grande de toutes les parallaxes est celle de la lune qui, sous l'équateur, s'élève jusqu'à 1° sexagésimal, ou 3600″. En prenant la 309e. partie de cette quantité, on aura 11″,6 pour l'excès de la parallaxe équatoriale de la lune sur la parallaxe polaire : la différence est encore moindre pour les rayons intermédiaires, et elle varie comme eux, proportionnellement au carré du sinus de la latitude. Mais cette différence, quoique fort petite, peut avoir une influence très-considérable sur plusieurs phénomènes astronomiques, par exemple, sur l'époque d'une occultation d'étoile par la lune, ou même sur sa possibilité. Il est donc nécessaire d'y avoir égard dans des opérations aussi délicates.

250. Pour cela, il faut faire une hypothèse sur la figure de la terre. Nous la supposerons elliptique, puisque nous avons trouvé que cette figure représente

---

$$\sin \Pi' = \frac{A}{D}, \qquad \sin \Pi = \frac{R}{D},$$

d'où l'on tire

$$\sin \Pi = \frac{R}{A} \cdot \sin \Pi';$$

ou, en substituant le rapport des angles Π' et Π à celui de leurs sinus

$$\Pi = \frac{R}{A} \cdot \Pi'.$$

Au moyen de cette formule, on voit que la parallaxe équatoriale est la plus grande de toutes, et la polaire la plus petite. Généralement, lorsqu'on connaîtra Π', on pourra calculer Π au moyen des valeurs R données dans la page 164 : on voit de plus qu'il suffit de connaître Π, par l'observation, relativement à une seule latitude, pour en déduire la valeur de Π', ou de la parallaxe équatoriale.

Digitized by Google

assez exactement les variations des degrés ; et d'ailleurs cette supposition ne fût-elle qu'approchée, elle serait suffisante pour l'objet que nous nous proposons. Mais alors, la première chose à remarquer, c'est que le rayon terrestre ne coïncide plus avec la verticale, voy. *fig.* 53, et le *zénith apparent* Z, situé sur le prolongement de cette verticale, diffère du *zénith vrai* Z', situé sur le prolongement du rayon. Or, c'est autour de la verticale que l'on observe les distances au zénith, puisque cette ligne seule est indiquée par les directions de la pesanteur. Ainsi, pour réduire les observations à ce qu'elles seraient si l'on était placé au centre de la terre, il faut leur faire subir deux corrections, l'une pour les ramener au *zénith vrai*, l'autre pour les ramener au centre de la terre.

251. Ces corrections sont très-faciles lorsque l'astre est observé dans le plan du méridien, par exemple, en L ou en L', *fig.* 53. Dans ce cas, la distance au zénith apparente est $L'OZ$, si l'astre observé est du côté du pôle ; ou LOZ s'il est du côté de l'équateur. C'est cette distance *apparente* que l'observation donne. La distance *vraie* que l'on cherche est $L'OZ'$ ou LOZ'. Pour l'obtenir, il faut ajouter, à la distance apparente, l'angle du rayon avec la verticale, lorsque l'astre est observé du côté du pôle, et retrancher ce même angle lorsque l'astre observé se trouve du côté de l'équateur.

252. Connaissant la distance zénithale LOZ', rapportée au zénith vrai, on prendra la parallaxe de hauteur pour cette distance, comme dans le cas de la terre sphérique, mais en y employant la valeur particulière du rayon terrestre OC, qui répond au lieu de l'observation. Cette parallaxe, retranchée de la distance zénithale LOZ', relative au rayon terrestre, donnera la

Digitized by Google

distance zénithale vraie, telle qu'on l'aurait observée du centre de la terre (*).

253. Si l'astre est observé hors du méridien, comme dans la *fig.* 55, les lignes OZ, OZ' et OL, prolongées

---

(*) Soit Z la distance au zénith apparent observée, Z' cette distance réduite au zénith vrai, et enfin Z'' la distance Z' réduite au centre de la terre. Nommons ω l'angle ZOZ' formé par le rayon avec la verticale, et ϖ la parallaxe de hauteur pour la distance Z'. Cela posé, si l'astre est dans le méridien du côté de l'équateur, on aura

$$Z' = Z - \omega; \quad Z'' = Z' - \varpi; \quad \sin \varpi = \sin \Pi \,.\, \sin Z'.$$

Π est ici la parallaxe horisontale pour le rayon OC. Ces formules supposent Z connu ; mais si c'était la distance vraie Z'' qui fût donnée, on en tirerait facilement Z, comme dans la page 246; car les deux dernières équations donneraient de même ϖ, en fonction de Z'', par la série citée, et ensuite on en déduirait

$$Z' = Z'' + \varpi; \quad Z = Z' + \omega = Z'' + \omega + \varpi.$$

Il faudrait prendre ω négatif si l'astre était observé du côté du pôle. N'oublions pas que ces formules ne sont applicables que dans le plan du méridien.

Le calcul de la parallaxe, par deux observations faites dans le méridien à de grandes distances, est tout aussi facile dans le sphéroïde que dans la sphère ; car en désignant toujours les positions des deux observateurs par OO', *fig.* 54 analogue à la *fig.* 48, le quadrilatère $COLO'$ offrira les mêmes relations. Seulement, comme les distances au zénith observées sont LOZ, $LO'Z'$, autour des verticales ON, ON', il faudra, pour obtenir les distances $LOZ_{,}$, $LOZ'_{,}$, relatives au zénith vrai, retrancher les angles des rayons CO CO', avec les verticales correspondantes, angles que nous nommerons ω, ω', et qui peuvent se calculer par la formule de la pag. 168. Ainsi, en nommant toujours ϖ, ϖ' les deux angles CLO, CLO', ou les parallaxes de hauteur, R R' les deux rayons terrestres en O et O' ; enfin, Π, Π' les deux parallaxes horisontales, et D la distance CL de l'astre

Digitized by Google

indéfiniment, formeront, sur la sphère céleste, un triangle sphérique, où l'on connaîtra le côté ZS, qui est la distance au zénith apparent observée, le côté ZZ', qui est l'angle du rayon, avec la verticale, et l'angle compris $Z'ZS$ qui

---

au centre de la terre, on aura, comme dans la page 247,

$$\sin \Pi = \frac{R}{D}; \quad \sin \Pi' = \frac{R'}{D}; \quad \varpi = \Pi . \sin\left\{Z - \omega\right\}; \quad \varpi' = \Pi' . \sin\left\{Z' - \omega'\right\}.$$

Nous entendons ici par *parallaxe horisontale*, celle qui a lieu lorsque le rayon visuel est perpendiculaire au rayon terrestre. Le rayon visuel n'est point alors tangent au sphéroïde ; de sorte qu'il serait plus juste d'appeler l'angle dont il s'agit, *plus grande parallaxe*, ou *parallaxe maximum;* mais l'usage a prévalu. Le rapport des sinus de ces parallaxes étant à fort peu près le même que celui des arcs, on en tire $\frac{\Pi'}{\Pi} = \frac{R'}{R}$, c'est-à-dire, qu'elles sont proportionnelles aux rayons terrestres, et en profitant de ce rapport pour éliminer Π', les expressions de ϖ et de ϖ', ajoutées ensemble, donnent

$$\varpi + \varpi' = \Pi . \left\{\frac{R . \sin\left\{Z - \omega\right\} + R' . \sin\left\{Z' - \omega'\right\}}{R}\right\}.$$

Mais la somme des parallaxes $\varpi + \varpi'$ est égale à l'angle OLO' ; de plus, la somme des quatre angles du quadrilatère $COLO'$ doit toujours égaler quatre angles droits, comme précédemment, on aura donc

$$OLO' = \varpi + \varpi' = Z - \omega + Z' - \omega' - \varphi;$$

φ étant l'angle OCO' formé par les deux rayons terrestres. Prolongeons les normales ON, ON' jusqu'à leur rencontre avec la droite OE représentant le plan de l'équateur ; les angles ENO, $EN'O'$, formés par ces normales avec ce plan, seront les latitudes des deux observateurs ; nous les nommerons λ, λ' ; or ces angles étant extérieurs aux triangles NOC, $N'O'C$, on aura évidemment

$$\lambda = NCO + \omega; \quad \lambda' = N'CO' + \omega';$$

Digitized by Google

est le supplément de l'azimuth apparent de l'astre, compté du pôle, puisqu'il est formé par le vertical SOZ avec le plan du méridien : on pourra donc calculer le troisième côté $Z'S$, ou la distance apparente de l'astre au zénith vrai.

---

d'où l'on tire

$$NCO + N'CO' = \varphi = \lambda + \lambda' - \omega - \omega';$$

valeur qui, étant substituée pour φ dans l'expression de OLO', donne

$$OLO' = Z + Z' - \lambda - \lambda';$$

résultat tout-à-fait analogue à ce qui a lieu dans la sphère. Cette valeur de OLO' ou de $\omega + \omega'$ étant égale à la première que nous avons obtenue, on en déduit la valeur de la parallaxe *maximum*, pour l'observateur O, qui sera

$$\Pi = \frac{R\left\{Z + Z' - \lambda - \lambda'\right\}}{R.\sin(Z - \omega) + R'.\sin(Z' - \omega')}.$$

Pour l'observateur O', on aurait

$$\Pi' = \frac{R'.\left\{Z + Z' - \lambda - \lambda'\right\}}{R\sin(Z - \omega) + R'\sin(Z' - \omega')}.$$

Ces expressions sont tout-à-fait analogues à celles de la page 248, et elles ne sont pas plus difficiles à calculer. Nous avons supposé, dans le calcul, que les deux observateurs étaient situés des deux côtés opposés de l'équateur ; s'ils étaient du même côté, il faudrait regarder la plus petite latitude comme négative dans la formule précédente, et faire aussi négative la valeur correspondante de ω ou de ω'. Dans ce cas, si l'astre, au lieu d'être situé entre les deux zéniths, était situé du même côté du zénith, par rapport aux deux observateurs, il faudrait encore regarder comme négative la plus petite des deux distances zénithales. Ces résultats seraient faciles à voir d'après la figure relative à chacun de ces cas particuliers.

On pourra même éliminer l'azimuth au moyen de sa valeur en fonction de la distance polaire apparente et de l'angle horaire apparent ; et, par ce moyen, $Z'S$ se trouve entièrement exprimé en quantités faciles à déduire de l'observation.

Connaissant la distance au zénith apparent $Z'S$, on prendra la parallaxe de hauteur pour cette distance et pour le rayon terrestre OC : cette parallaxe, représentée par le petit arc SS', aura, pour expression, $\Pi . \sin Z'S$, Π étant la parallaxe horisontale pour le rayon OC. Et ainsi l'on connaîtra la distance vraie $Z'S' = Z'S - SS'$, telle qu'on l'aurait observée du centre de la terre (*).

(*) Soit A l'azimuth apparent de l'astre compté du pôle. Ce sera le supplément de l'angle $Z'ZS$; soit Z la distance au zénith apparent observée, Z' la distance apparente au zénith vrai, ω l'angle du rayon avec la verticale. Cela posé, si l'on fait attention que $\cos(180 - A) = -\cos A$; le triangle sphérique $ZZ'S$ donnera

$$\cos Z' = -\sin Z \sin \omega \cos A + \cos \omega \cos Z ;$$

en prenant un angle auxiliaire tel qu'on ait

$$\tang \varphi = \cos A \tang \omega ,$$

il viendra

$$\cos Z' = \frac{\cos \omega}{\cos \varphi} . \cos \left\{ Z + \varphi \right\} .$$

Si l'on veut conclure l'azimuth, d'après l'observation de l'angle horaire, ce qui est plus facile et plus ordinaire que de l'observer, rien n'est plus simple. Car si l'on imagine un nouveau triangle sphérique ZPS, formé *fig.* 56, par les trois rayons visuels menés de l'observateur au pôle, au zénith apparent et à l'astre, on connaîtra, dans ce triangle la distance apparente observée ou Z ; la distance du pôle au zénith apparent ou D ; enfin l'angle horaire apparent ou P. L'angle SZP compris entre les deux côtés Z et D de ce

Digitized by Google

254. Maintenant, si l'on veut avoir les parallaxes de déclinaison et d'ascension droite, il n'y a rien de plus facile ; car en rapportant tout au zénith vrai Z', les circonstances deviennent absolument les mêmes que dans le cas de la terre sphérique représentée dans la figure 52. Les expressions trouvées alors pour ces parallaxes, s'appliqueront donc encore dans le cas actuel ; seulement, comme la distance du zénith au pôle entre dans ces formules, il faudra y faire usage de la distance au zénith

---

triangle, est précisément égal à l'azimuth A. On pourra donc calculer cet azimuth par la combinaison des formules suivantes, tirées de la trigonométrie sphérique,

$$\tang \psi = \cos D \tang P ; \qquad \sin (A + \psi) = \frac{\sin \psi \tang D}{\tang Z},$$

où ψ est un angle auxiliaire. Quand on connaîtra A par ces formules, les deux premières équations feront connaître Z', ou la distance apparente au zénith vrai. La parallaxe, pour cette distance ou $\Pi . \sin Z'$, sera ainsi connue. En la retranchant de Z', on aura la distance zénithale vraie $Z'' = Z' - \Pi \sin Z'$.

Si au contraire Z'' était donné, on en déduirait Z' au moyen des formules de la page 246, où ω représenterait la parallaxe de hauteur $Z' - Z''$ rapportée au zénith vrai. Ensuite on en déduirait Z, en résolvant le triangle sphérique $S'Z'Z$ dans lequel l'angle Z', qui est l'azimuth vrai de l'astre, serait facile à calculer d'après les élémens de son lieu vrai. Mais il est une autre méthode bien plus simple pour trouver directement Z sans passer par Z'. On la verra dans la note suivante.

Lorsque Z est très-considérable par rapport à ω, on peut aisément obtenir la valeur de $Z' - Z$ en série convergente ordonnée suivant les puissances de $\sin \omega$. Mais cette réduction n'est pas possible, en général, parce que les arcs Z, Z', ω peuvent devenir comparables entre eux, lorsque l'astre L est observé très-près du zénith, vrai ou apparent.

Digitized by Google

vrai Z', c'est-à-dire, augmenter la distance apparente du zénith au pôle d'une quantité égale à l'angle $Z'OZ$, formé par le rayon terrestre avec la verticale. Au moyen de ces résultats rien n'est plus facile que d'obtenir les élémens du lieu apparent de l'astre, étant donné son lieu vrai, rapporté au centre du sphéroïde terrestre (*).

(*) D'après ce que l'on vient de dire, en nommant toujours ω l'angle du rayon terrestre avec la verticale, et désignant par α la parallaxe d'ascension droite, par δ la parallaxe de déclinaison, les formules trouvées dans la note de la pag. 255, pour le cas de la terre sphérique, donneront, dans le sphéroïde,

$$\sin \alpha = \frac{\sin \Pi \,.\, \sin \left\{ D + \omega \right\} \sin \left\{ P' + \alpha \right\}}{\sin \Delta'}$$

$$\sin \delta = \left\{ \frac{\sin \Pi \cos \left\{ D + \omega \right\} \sin \left\{ P' + \alpha \right\} - 2 \cos \Delta' \,.\, \cos \left\{ P' + \frac{1}{2} \alpha \right\} \sin \frac{1}{2} \alpha}{\sin P'} \right\} \sin \left\{ \Delta' + \delta \right\}$$

ou avec une approximation presque toujours suffisante,

$$\alpha = \frac{\Pi \,.\, \sin \left\{ D + \omega \right\} \,.\, \sin P'}{\sin \Delta'},$$

$$\delta = \Pi \,.\, \left\{ \sin \Delta' \,.\, \cos \left\{ D + \omega \right\} - \cos \Delta' \,.\, \sin \left\{ D + \omega \right\} \cos P' \right\};$$

Δ' est la distance polaire vraie, et P' l'angle horaire vrai vus du centre de la terre. α et δ étant calculés par ces formules, si l'on nomme Δ la distance polaire apparente, et P l'angle horaire apparent, vus de la surface du sphéroïde terrestre, on aura

$$P = P' + \alpha; \qquad \Delta = \Delta' + \delta,$$

avec P, Δ et D on peut calculer directement la distance apparente Z. Car si l'on forme le triangle sphérique SZP, *fig.* 56, par trois rayons visuels, menés de l'observateur au zénith apparent à l'astre et au pôle, on connaîtra dans ce triangle les côtés $PS = \Delta$; $PZ = D$; et l'angle $SPZ = P$. On en conclura donc aisément le

Digitized by Google

255. J'ai dit, dans la page 34, que le diamètre apparent de la lune à l'horison est un peu plus petit qu'au zénith, lorsqu'on le mesure exactement avec le micromètre; c'est un effet de la parallaxe, et il est facile de le démontrer. Pour cela, considérons d'abord la distance de la lune au centre de la terre comme constante, en sorte qu'elle décrive son cercle diurne autour de ce centre connu dans la *fig.* 16 *bis*, pl. 3. Alors la lune étant au zénith en Z sera plus près de l'observateur O que lorsqu'elle était à l'horison en L, car dans le cercle LZL la flèche OZ est moindre que la demi-corde OL'. La différence de ces deux distances produit un effet sensible sur le diamètre apparent qui augmente à mesure que la lune s'élève (*). La loi de cet accroissement est facile à calcu-

---

troisième côté ou la distance zénithale apparente $ZS = Z$. On pourra également calculer l'angle SZP ou l'azimuth apparent de l'astre. On aura donc ainsi tous les élémens du lieu apparent de l'astre, de la manière la plus simple, au moyen des élémens de son lieu vrai. De même si l'on forme le triangle sphérique $S'ZP$ par trois rayons visuels, menés du centre de la terre au zénith vrai, à l'astre et au pôle, on connaîtra dans ce triangle les côtés $S'P = \Delta'$; $Z'P = D + \omega$, et l'angle $S'PZ' = P'$. On pourra donc calculer le troisième côté $S'Z' = Z''$, d'où l'on conclura Z' ou $Z'S$ par les formules de la page 246. On pourra aussi calculer l'angle $S'Z'P$ qui est l'azimuth vrai de l'astre. On voit que la considération de l'ellipticité de la terre ne complique nullement ces résultats.

(*) Nommons r le demi-diamètre OC de la terre, R le rayon CL, ou CZ, mené de son centre à celui de la lune. La ligne OL, côté du triangle rectangle COL, aura pour longueur $\sqrt{R^2 - r^2}$; la flèche OZ aura pour longueur $R - r$; et la différence de ces deux lignes, ou l'excès de OL sur OZ, sera exprimée par

$$\sqrt{R^2 - r^2} - (R - r),$$

si l'on suppose, comme cela a lieu dans la nature, que r soit une

Digitized by Google

ler (*), et sa valeur totale, depuis l'horison jusqu'au zénith est d'environ $\frac{1}{60}$, parce que dans le passage d'une de ces positions à l'autre la distance de la lune à l'observateur se trouve diminuée d'une quantité sensiblement égale au rayon OC de la terre qui en est environ la soixantième partie. L'exacte conformité de cette loi avec les phénomènes, soit que la lune monte ou descende sur l'horison, ne permet pas de douter qu'ils ne soient dus à la cause que nous venons d'assigner, et l'on voit aussi, par cet accord, que si la distance de la lune au centre de la terre n'est pas exactement constante, comme nous l'avons supposé, du moins les variations qu'elle éprouve pendant que cet astre s'élève depuis l'horison jusqu'au zénith, sont trop petites pour produire un changement notable dans cet intervalle, sur son diamètre apparent.

256. Dans tout ce qui précède, nous n'avons pas encore parlé de la parallaxe du soleil. En effet, elle est si petite qu'aucune des méthodes précédentes ne peut la

---

très-petite fraction par rapport à R, on pourra se contenter d'extraire, par approximation, la racine carrée indiquée, en se servant, pour cela, de la formule du binome de Newton; et en se bornant aux premières puissances de r, on aura, pour cette racine $R - \frac{r^2}{2R}$. L'expression ci-dessus, qui représente la différence des lignes OH et OL, sera donc exprimée par $r - \frac{r^2}{2R}$, c'est-à-dire, qu'elle est presque égale à r, car le terme $-\frac{r^2}{2R}$ est très-petit, par rapport à r, puisqu'il est égal au produit de r par $\frac{r}{2R}$, qui est une fraction extrêmement petite et peu différente de $\frac{1}{120}$.

(*) On la trouvera dans une note à la fin du livre.

Digitized by Google

donner avec exactitude ; aussi les astronomes ont ignoré pendant longtems sa valeur. Enfin, on a réussi à la déterminer ; non pas par l'observation immédiate, qui eût été sujette à trop d'inexactitude, mais d'après certains rapports, qui existent entre les distances des diverses planètes, et de la terre elle-même, au centre du soleil. On sent que cette méthode indirecte, n'a pu être inventée, qu'après que l'on a connu, avec beaucoup d'exactitude, les mouvemens planétaires. C'est pourquoi je l'exposerai plus tard. La parallaxe du soleil, qu'on en a déduite, est égale à 8″,8 sexagésimales, ou à 27″,1 de la division décimale ; ce qui donne la distance moyenne de cet astre à la terre, égale à 23578 rayons terrestres, ou plus de trente-quatre millions de lieues. On ne pouvait rien obtenir de précis sur les dimensions du système solaire, tant qu'il restait quelque incertitude sur cet élément. Par conséquent si l'on voulait suivre réellement la marche d'invention, il faudrait d'abord faire abstraction de cette valeur jusqu'à l'époque où elle a pu être déterminée, et revenir ensuite sur tous les résultats. Telle a été en effet la marche réelle de l'astronomie, dont les progrès, comme je l'ai déja répété plusieurs fois, ne sont qu'une suite d'approximations successives. Mais cette marche, tour-à-tour directe et rétrograde, serait embarrassante et peu méthodique. Il nous suffira de remarquer que la valeur de cette parallaxe étant fort petite, les résultats approchés que l'on obtiendrait, en n'y ayant point égard, différeraient extrêmement peu des résultats définitifs que l'on trouverait en l'employant dans une seconde approximation. Mais une fois que cette vérité est bien comprise, il est bien plus court d'admettre provisoirement l'emploi d'une si petite correction, dont la nécessité est reconnue, et dont la valeur sera par la suite démontrée très-exactement, afin

Digitized by Google

d'arriver d'abord sans retour aux résultats définitifs. Il en est de même des petites corrections relatives à la précession, à l'aberration et à la nutation, dont pour plus de brièveté et de méthode, nous sommes convenus de faire un usage anticipé. Ainsi nous supposerons toujours dans les résultats dont nous ferons usage, qu'on y a corrigé l'effet de la parallaxe solaire, d'après la valeur que nous venons de rapporter.

Digitized by Google

CHAPITRE XX.

Description et usages du Cercle répétiteur.

257. M'ÉTANT proposé de réunir et d'expliquer dans cet Ouvrage les procédés d'observation les plus exacts et les plus généralement usités, je vais exposer avec détail l'usage du cercle répétiteur, qui à lui seul peut suppléer au mural, à et la lunette méridienne ; qui les remplace avec une exactitude indéfinie ; qui, par son peu de volume et le petit nombre de vérifications qu'il exige, peut être aisément transporté partout ; enfin, dont les applications ne sont pas bornées à l'astronomie seule, mais s'étendent à la géodésie, à la topographie, et à une infinité de recherches physiques de tout genre, où elles portent une précision inespérée.

258. L'essentiel de cet instrument consiste dans un limbe circulaire vertical *ZAP*, *fig.* 57, qui peut tourner autour de la verticale *CP*, menée par son centre, et qui, de plus, peut aussi tourner verticalement autour d'un axe horisontal mené par ce même centre. Une lunette *OCL*, munie d'un micromètre à fil fixe et d'un vernier, tourne autour du centre *C*, et peut parcourir successivement tous les points du limbe. L'instrument entier est représenté dans la planche 12. Pour en comprendre l'usage, revenons à la *fig.* 57. Soit *S* un objet éloigné et immobile, dont on veut mesurer la distance au zénith. Ce sera même, si l'on veut, une étoile. Car bien que les astres se déplacent à chaque instant par l'effet du

Digitized by Google

mouvement diurne, on peut calculer les effets de ce déplacement pendant l'intervalle des observations et en tenir compte, comme nous le verrons tout-à-l'heure ; ce qui ramène la question au même état que si l'on n'avait à observer que des points fixes. Cela posé, voici comment on opère : on commence par fixer le vernier de la lunette sur le point zéro de la division ; puis on dirige le limbe dans le vertical de l'astre, au moyen du mouvement azimuthal, et on le fait ensuite tourner verticalement autour de son centre, jusqu'à ce que le point *S* réponde au centre des fils ; c'est ce que représente la *fig.* 57. Concevons maintenant un fil à-plomb *CP* mené par le centre du limbe ; sa direction prolongée déterminera le zénith *Z* ; et l'arc *AZ*, lu sur le limbe, sera la distance au zénith. Mais on peut éviter l'usage de ce fil et la lecture de l'arc comme on va le voir.

259. Les choses étant disposées comme nous venons de le dire, on donne au limbe un mouvement azimuthal autour de la verticale qui passe par son centre, et on lui fait faire un demi-tour, de manière à le ramener dans le vertical de l'astre, voy. *fig.* 58. Dans ce mouvement, le point *Z* du limbe n'a pas changé. Seulement, si le limbe faisait d'abord face à l'est, il fait maintenant face à l'ouest, et comme la lunette est fixe sur le limbe, il s'ensuit que sa direction actuelle *LAC*, ait toujours le même angle avec la verticale. Alors, on détache cette lunette, et en la faisant tourner sur le limbe, on la ramène sur l'astre. Sa nouvelle direction *CA'S* répond alors à un autre point du limbe, tel que *A'* ; et puisque nous supposons l'astre immobile, l'arc *A'Z* est exactement égal à l'arc *AZ*, ou à la distance au zénith. L'arc total *AA'*, que la lunette vient de parcourir, est donc double de cette distance. Ainsi, en

Digitized by Google

lisant cet arc, indiqué par le déplacement du vernier sur la division du limbe, et prenant sa moitié, on aura la distance au zénith sans qu'il soit du tout nécessaire de connaître le point Z; et, par conséquent, sans avoir aucun besoin du fil à-plomb.

260. A la vérité, ceci suppose que le limbe, en passant de la première observation à la seconde, a tourné exactement autour de la verticale, en sorte que chacun de ses points reste exactement à la même hauteur au-dessus du plan horisontal. Pour s'en assurer, on attache derrière le limbe et parallélement à son plan un niveau à bulle d'air très-sensible, que l'on *cale*, c'est-à-dire que l'on met bien horisontal dans la première position du cercle, où le limbe faisait, je suppose, face à l'est (*); ensuite si le point Z du limbe s'est un peu déplacé par le retournement, lorsque le limbe fait face à l'ouest, on en est averti par le niveau qui s'est déplacé avec lui, et dont la bulle ne répond plus aux mêmes points de la division du tube. Alors on ramène le limbe à la position où le niveau rentre dans ses premières limites; ainsi, sans connaître le point Z, on est toutefois assuré qu'il revient dans la même verticale. Il y a, dans tous les cercles, des vis de rappel pour faire ainsi mouvoir le limbe par degrés insensibles, et pour caler le niveau.

(*) Il y a pour cet objet une division tracée par l'artiste sur le tube du niveau ou parallélement à sa longueur. Le zéro de cette division est placé au milieu du tube. Pour caler le niveau, on fait varier son inclinaison jusqu'à ce que les extrémités de la bulle répondent à des divisions également éloignées du point zéro. A la rigueur dans les observations au cercle, il suffit de placer le bulle entre les mêmes points physiques du tube, dans chaque couple d'observations; et il n'est pas du tout nécessaire que son milieu réponde au zéro de la division.

Digitized by Google

261. Après qu'on a ainsi la distance zénithale double, on obtient la distance quadruple de la manière suivante : sans toucher à la lunette, on retourne l'instrument, et on ramène le limbe la face à l'est, comme il était d'abord. La lunette prend alors la direction $CA'L$, *fig.* 59. Si on la ramenait vers l'astre, le limbe restant fixe, elle reviendrait au point A d'où elle est partie, et on détruirait l'arc qu'on lui a fait parcourir. Au lieu de cela, on la laisse fixe en A', mais on ramène le limbe, en le faisant tourner verticalement autour de son centre, jusqu'à ce que l'astre revienne dans la lunette au centre des fils. Alors le point A' est dirigé vers l'astre, et le point de départ descend en A, *fig.* 60. Cela fait, on se retrouve exactement dans les mêmes circonstances où l'on était au commencement de la première observation, *fig.* 57 ; si ce n'est que le point de départ est A', c'est-à-dire, la fin du premier arc parcouru (*). En partant de là, et opérant de la même manière, on peut faire une nouvelle observation double, qui amènera la lunette en A'' ; et comme l'arc $A'A''$ sera égal à AA', l'arc total $AA'A''$ sera la distance au zénith quadruple ; en le divisant par 4, on aura la distance simple.

Ayant la distance quadruple, on peut l'avoir sextuple par le même procédé : il faut retourner le limbe face à l'est, dans sa première position, et ramener le point A'' vers l'astre, sans détacher la lunette. Alors le nouveau point de départ sera A'' ; une nouvelle observation double

(*) En faisant ainsi mouvoir le limbe dans la troisième observation, le niveau qui y est attaché se déplace avec lui, et cesse d'être horisontal ; mais on le détache, et on le ramène à cette position où on achève de le fixer par ses vis de rappel. On fait la même chose après chaque observation paire.

Digitized by Google

amènera la lunette en A''', et l'arc $AA'A''A'''$ sera l'arc sextuple. En le divisant par 6, on aura l'arc simple.

En continuant ainsi indéfiniment, on obtiendra tel multiple de la distance que l'on voudra ; et en divisant l'arc total parcouru par le nombre des observations, on aura la distance zénithale simple. On peut faire ainsi parcourir à la lunette plusieurs circonférences entières, dont il faudra tenir compte. Mais pour s'éviter la peine de les compter une à une, il suffit de lire une seule fois l'arc double, ce qui fait connaître la distance simple ; et quand les observations sont terminées, on voit aisément quel nombre de circonférences entières, il faut ajouter pour que l'arc total, divisé par le nombre des observations, redonne la distance simple, déterminée approximativement par la première lecture.

262. Examinons maintenant en quoi consiste l'avantage de cette multiplication. Elle n'en aurait aucun si les divisions faites sur le cercle étaient mathématiquement exactes, et si l'observateur pointait toujours parfaitement juste. Car alors une seule observation donnerait la distance au zénith exacte. Mais comme ces conditions sont impossibles à remplir dans la pratique, la répétition des angles y supplée par des compensations.

D'abord, quant à l'erreur des divisions, on voit que les arcs mesurés se suivent sans interruption sur le limbe, de manière que le point du limbe, qui est la fin d'une observation, devient l'origine de la suivante. Cela fait que la somme des observations, ou l'arc total parcouru, ne renferme absolument aucune erreur intermédiaire, mais seulement les deux erreurs des lectures extrêmes. Ces erreurs elles-mêmes sont encore affaiblies, parce que les alidades du cercle portent quatre verniers que l'on lit séparément, et dont la moyenne contribue à

Digitized by Google

marquer le commencement et la fin de l'arc total avec une plus grande probabilité d'exactitude. Enfin, la petite erreur, qui peut rester encore, malgré ces précautions, dans les lectures extrêmes, se trouvant répartie, par la division, sur l'arc entier parcouru sur le limbe, ne conserve plus qu'une influence insensible sur l'arc simple parcouru dans une seule observation ; du moins, en supposant les observations suffisamment multipliées. Les erreurs des divisions s'affaiblissent donc dans le cercle répétiteur par la répétition même, et la compensation qui s'opère entre elles n'est pas l'effet d'une probabilité, mais d'une certitude.

Pour sentir jusqu'où cette compensation peut aller, il faut savoir que dans nos cercles répétiteurs, qui n'ont ordinairement que 4 décimètres (15 pouces environ) de diamètre, l'erreur des divisions ne peut pas, certainement, s'élever à 15″ sexagésimales. Elle se réduirait donc, au plus, à $\frac{1}{2}$ seconde, après trente observations; que devient-elle après quatre-vingts ou cent? Que devient-elle si, comme on peut le faire et comme on l'a fait souvent, on laisse les séries des différens jours se succéder sans interruption sur le limbe, de sorte que les deux erreurs des lectures extrêmes se trouvent seules réparties sur un arc total qui contient plusieurs milliers de fois l'arc simple?

L'erreur des divisions est donc comme nulle dans les observations faites au cercle. Il est impossible qu'elle soit aussi rigoureusement détruite dans les plus grands instrumens, s'ils ne sont pas répétiteurs. Jamais l'adresse de l'artiste ne peut égaler un procédé mathématique.

263. Mais il y a d'autres erreurs qui se détruisent par le principe des probabilités dans l'usage du cercle, et qui restent dans les autres instrumens. Telles sont les erreurs

Digitized by Google

du niveau, qui, déja très-petites dans les premiers cercles répétiteurs que l'on a construits, sont encore moindres dans nos cercles actuels, où le niveau donne immédiatement les fractions de seconde. Telles sont encore les erreurs du pointé, qui, déja fort petites par elles-mêmes, se détruisent, comme celles du niveau, par leur compensation fortuite dans plusieurs milliers d'observations. Ces erreurs existent aussi dans les observations faites avec de grands instrumens, comme le mural. Car l'erreur du pointé s'y retrouve, et celle du niveau est représentée par l'erreur du fil à-plomb. Mais ici, le petit nombre des observations ne permet pas d'espérer une compensation aussi exacte que dans le cercle. Si l'on suppose que l'exactitude des résultats moyens soit en raison composée du nombre des observations, et de la longueur du rayon de l'instrument, cent observations faites avec un cercle de 2 décimètres de rayon, équivaudraient à une observation unique faite avec un mural de 20 mètres. Où pourrait-on trouver de pareils instrumens, et surtout comment pourrait-on les employer dans les observations qui exigent des voyages?

264. Après avoir expliqué, en général, le mécanisme de la répétition et ses avantages, il faut entrer dans quelques détails sur les vérifications particulières que l'instrument exige avant d'être employé aux observations.

La première condition à remplir, c'est que le limbe soit exactement vertical, et qu'il puisse se maintenir dans cette position pendant que l'on observe, ou, du moins, qu'on ait des moyens de l'y ramener. Pour cela, on place derrière le limbe, et perpendiculairement à son plan, un petit niveau à bulle d'air qu'on attache à l'axe

Digitized by Google

horisontal autour duquel le cercle tourne, voy. *fig.* 61. Alors, quand le niveau est horisontal, le limbe est vertical à cause de la perpendicularité. Or, il y a dans les cercles répétiteurs une vis de rappel qui fait mouvoir le limbe, et avec laquelle on le ramène à la verticalité, lorsque le niveau perpendiculaire indique qu'il s'en écarte.

Quant à ce niveau lui-même, on voit qu'il est horisontal, quand les extrémités de la bulle d'air qu'il renferme se terminent à deux traits fixes, tracés par l'artiste pour cet objet. Mais il est utile de savoir au besoin suppléer à cette donnée.

En effet, en supposant même que ce niveau eût été parfaitement réglé par l'artiste, il pourrait bien arriver qu'il se dérangeât dans sa monture, et qu'il cessât d'être perpendiculaire au limbe. C'est pourquoi on le vérifie avant de commencer les observations. Pour cela, on attache sur le limbe deux pinces P, Q, sur lesquelles on a tracé deux points extrêmement fins, qui doivent, par construction, se trouver à égales distances du plan du limbe, auquel les pinces sont appliquées. Les artistes ont des moyens très-précis et très-simples pour remplir cette condition. A l'un de ces points, au plus élevé, on suspend un fil à-plomb et l'on fait mouvoir le limbe jusqu'à ce que ce fil vienne battre exactement sur l'autre point. Alors le limbe est vertical, puisque, par construction, la ligne verticale menée par les deux points P et Q, est parallèle à son plan. Quand on l'a amené dans cette position, on fait mouvoir les vis de rappel du petit niveau, de manière qu'il devienne exactement horisontal, et les variations de ce niveau indiquent ensuite si le limbe s'écarte de la verticalité. La sensibilité de cet instrument rend même pour cela son usage préférable à celui du

Digitized by Google

fil à-plomb, en même tems qu'il est infiniment plus commode (*).

(*) Pour apprécier l'erreur que produirait un petit défaut de verticalité, prolongeons le plan du limbe jusqu'à la sphère céleste; il la coupera suivant un grand cercle que nous nommerons $HZ'H$, *fig.* 60. Le point Z', le plus élevé de ce cercle, sera le faux zénith indiqué par l'instrument, et la ligne OZ', menée à ce point par le centre du limbe, sera la verticale apparente, autour de laquelle on mesure, sur le limbe, les distances au zénith. Soit maintenant OZ la verticale vraie, en sorte que $Z'OZ$ soit l'inclinaison du plan du limbe sur la verticale, angle que nous nommerons I. Cela posé, si l'on mène du point O un rayon visuel OS à une étoile quelconque, la distance au zénith véritable sera l'angle ZOS, que nous nommerons Z. Mais la fausse distance mesurée sur le limbe, sera l'angle $Z'OS$, que nous nommerons Z'. Les trois côtés ZZ', ZS, $Z'S$, formeront, sur la sphère céleste, un triangle sphérique, rectangle en Z', et dans lequel on aura

$$\cos Z = \cos Z' \cos I;$$

de là, on tirerait Z connaissant Z'. Mais il faudrait faire le calcul avec une exactitude minutieuse, à cause du facteur $\cos I$, qui diffère très-peu de l'unité, parce que l'inclinaison I, qui peut rester après les vérifications précédentes, est nécessairement fort petite. C'est pourquoi il est plus simple de chercher approximativement la différence des angles Z et Z'. A cet effet, substituons à $\cos I$ sa valeur $1 - 2\sin^2 \frac{1}{2} I$, nous aurons

$$\cos Z' - \cos Z = 2\cos Z' \,.\, \sin^2 \tfrac{1}{2} I.$$

Or, $\cos Z' - \cos Z = 2.\sin \frac{1}{2}\left\{Z + Z'\right\} . \sin \frac{1}{2}\left\{Z - Z'\right\}$. Substituant cette valeur, on trouve

$$\sin \tfrac{1}{2} . \left\{Z - Z'\right\} = \frac{\cos Z' \,.\, \sin^2 \frac{1}{2} I}{\sin \frac{1}{2} \left\{Z + Z'\right\}};$$

c'est le sinus de la différence cherchée. Elle est toujours positive tant que Z' est moindre qu'un angle droit. Par conséquent dans cette limite,

Digitized by Google

265. Si l'on voulait vérifier aussi les pinces elles-mêmes, rien ne serait plus facile. Le petit niveau étant calé, c'est-à-dire rendu horisontal, faites tourner le limbe verticalement, de manière que la pince qui était en haut vienne en bas, et que l'autre qui était en bas vienne en haut. Alors, suspendez de nouveau le fil à-plomb ; s'il bat encore exactement sur les deux points P et Q, le limbe est vertical et les pinces sont bien réglées. Dans le cas contraire, l'écart du fil à-plomb sera double du défaut de parallélisme. Car, soit, par exemple, LL', *fig.* 63, la direction du limbe dans sa première position, la verticale PQ faisant avec lui un

---

la distance vraie surpasse toujours la distance observée : cela doit être, puisque Z est une hypothénuse. L'inclinaison I ne pouvant jamais être que de quelques minutes, le facteur $\sin^2 \frac{1}{2} I$, qui se trouve au numérateur, sera toujours un très-petit nombre, et le dénominateur $\sin \frac{1}{2} \left\{ Z + Z' \right\}$ sera, comparativement, très-considérable, même à 1° de distance du zénith. Ainsi, au-dessous de ce terme, la différence des arcs Z et Z' sera extrêmement petite ; on pourra donc, alors sans craindre aucune erreur, supposer $Z = Z'$ dans le second membre, ce qui revient à négliger le carré de $Z - Z'$. On trouvera ainsi définitivement,

$$\sin \frac{1}{2} \left\{ Z - Z' \right\} = \frac{\sin^2 \frac{1}{2} I}{\operatorname{tang} Z'}.$$

Pour apprécier l'exactitude de cette formule, il faut comparer les résultats qu'elle donne avec ceux que l'on tire de la formule rigoureuse $\cos Z = \cos Z' \,.\, \cos I$. En supposant $I = 10'$, et $Z' = 1°$ sex., on trouve déja que les deux formules s'accordent presque exactement. Plus près du zénith, l'approximation diminue ; et enfin elle cesse d'être suffisamment exacte ; par exemple, quand Z' est nul, elle donne $Z' - Z$ infini, au lieu que la formule rigoureuse donne alors $\cos Z = \cos I$, ou $Z = I$, c'est-à-dire, que toute l'erreur de la verticalité se reporte sur la distance au zénith, comme cela doit en effet arriver.

On trouvera à la fin de ce livre une table où les valeurs de $Z - Z'$

Digitized by Google

certain angle par l'erreur des pinces. Dans le renversement, chacun des points P, Q décrit une circonférence de cercle autour de l'axe de rotation CAC', qui est perpendiculaire au limbe. La ligne PQ décrit donc, autour de cet axe, une surface conique dont l'angle, au centre, est $PC'P'$ ou $Q'C'Q$, P' et Q' désignant les nouvelles positions des points P et Q après le renversement. Si par le point C' on mène $C'L'$ parallèle au limbe, cette ligne, qui demeure immobile pendant la rotation divisera l'angle $Q'C'P$ en deux moitiés, dont chacune sera égale à l'angle $L'C'P$, formé par la ligne PQ avec le limbe. Or, quand on suspendra de nouveau le fil à-plomb

---

sont calculées de degré en degré, depuis l'horison jusqu'au zénith, en supposant une inclinaison I de 10′ sexagésimales. Si l'on voulait en déduire les résultats relatifs à une autre inclinaison I', il suffirait de multiplier les nombres de la table par le rapport $\frac{I'^2}{I^2}$, car il est visible que les valeurs de $\sin \frac{1}{2} (Z - Z')$ sont entre elles comme les carrés des sinus des inclinaisons lorsque les distances au zénith sont égales; et comme les angles $Z - Z'$ sont fort petits, les arcs sont aussi dans le même rapport.

On doit tirer de ceci deux conclusions : la première, c'est qu'il faut atténuer, autant que possible, le défaut de verticalité; la seconde, qu'il faut éviter d'observer très-près du zénith, où l'influence de ce défaut sur les distances est plus sensible, à cause du dénominateur tang Z'. Ce dernier inconvénient est toujours nul pour la polaire, qui sert ordinairement à déterminer les latitudes. Sa distance au zénith sort des limites où les erreurs de la verticalité sont considérables, au moins dans tous les pays habitables où l'on peut avoir occasion de l'observer. Enfin, quand on observera près du zénith, même à quelques degrés de distance, on fera bien d'évaluer, aussi exactement que possible, l'inclinaison du plan du limbe, et on en tiendra compte, au moyen de la formule précédente, ce qui atténuera toujours l'erreur, et pourra même en rendre l'influence tout-à-fait insensible.

Digitized by Google

en C', la quantité $Q''Q'P'$, dont il s'écartera de la ligne $P'Q'$ sera égale à l'angle au centre $Q'C'P$. Cet écart sera par conséquent, double de l'erreur du parallélisme.

Si l'on s'appercevait d'une erreur de ce genre, il faudrait s'occuper de la corriger. Pour cela, il doit y avoir, sur les pinces, des vis de rappel qui permettent de rapprocher ou d'éloigner les points P et Q. On fera donc marcher ces points de manière à détruire la moitié de l'écart observé, et avec les pinces ainsi réglées, on remettra le limbe vertical. Mais comme il est bien difficile que l'on fasse exactement cette bissection dès la première fois, lorsqu'on aura rétabli à très-peu près la verticalité du limbe, au moyen des pinces corrigées, on profitera de cette verticalité approchée pour corriger de nouveau les pinces, et en procédant ainsi par une suite d'essais et de corrections successives, on parviendra bientôt à régler le tout exactement. Le petit niveau perpendiculaire au limbe indiquera ensuite la conservation de la verticalité. On peut même, en répétant ces tentatives sur divers points du limbe, s'assurer que l'axe de rotation lui est exactement perpendiculaire, car s'il ne l'était pas, les positions du fil à-plomb ne s'accorderaient pas entre elles sur les différens rayons du cercle.

266. A la rigueur, on pourrait se contenter de ces précautions, relativement à la verticalité, car si on la trouvait dérangée dans une observation, les vis de rappel de l'instrument suffiraient pour la rétablir, d'après l'indication du niveau perpendiculaire. Mais comme cette opération prend toujours un peu de tems, il faut la rendre aussi rare que possible. Or, on serait forcé de la faire à chaque observation, par le retournement du cercle, si la colonne qui le porte n'était pas exactement verticale. Car si, dans la première position de l'instrument, lorsqu'il fait face à

Digitized by Google

l'est, *LM*, *fig.* 64, était le limbe supposé verti
la colonne inclinée à l'horison; comme cel
immobile dans le retournement, le limbe, e
l'ouest, prendrait la direction *L'M'*, toujo
ment inclinée sur cet axe, mais non plus ve
sorte qu'il serait nécessaire de lui rendre la
et de la lui rendre ainsi tour-à-tour, en p
côté à l'autre, dans chaque observation. O
inconvéniens en rendant la colonne verticale,
mène à cette situation au moyen de trois vis
le cercle horisontal sur lequel la colonne s'él
sert de base à tout l'instrument.

Ces trois vis, désignées par *V*, *V'*, *V''* dans
sont espacées à des intervalles égaux, de m
les rayons *CV*, *CV'*, *CV''*, menés perpendicul
l'axe de la colonne, fassent entre eux des a
au tiers de la circonférence. Le procédé consis
d'abord un de ces rayons, par exemple *CV*,
et à faire ensuite tourner le plan *VV'V''* auto
ligne, comme axe, de manière à le rendre e
tement horisontal dans tous les sens. Alors l'axe
par construction, est perpendiculaire à ce plan
nécessairement vertical.

Pour cela, on profite du grand niveau
est adapté à la colonne du cercle, et qui sert
le zénith dans les retournemens. On dirige le
le vertical de la vis *V*, et on met le niveau
ensuite on donne à la colonne un mouvemen
autour de la colonne *CC'*, et on lui fait faire
tour qui ramène le limbe dans le vertical de la
alors les deux bouts du niveau ont changé
par rapport à cette vis. Le bout qui était s
venu nord, et celui qui était nord est d

Digitized by Google

Puisque la rotation s'est faite autour de la colonne CC', le niveau a décrit une surface conique autour de la ligne CC' comme axe. Si cet axe est vertical, cette surface devient un plan horisontal, et le niveau n'est point dérangé. Mais si la colonne est inclinée à l'horison, le niveau ne peut plus être horisontal, et l'inclinaison qui produit son écart est doublée par le retournement. On corrige donc la moitié de cet écart en faisant marcher la vis V dans le sens convenable, c'est-à-dire, en haussant ou baissant le point V, selon l'indication du niveau. Puis on achève l'autre moitié de la correction en faisant marcher le niveau lui-même, par ses vis de rappel, jusqu'à ce qu'il se trouve ainsi ramené au point d'égalité où on l'avait placé d'abord. Mais comme on n'est jamais assuré d'avoir fait la bissection exactement, on recommence l'opération avec le niveau ainsi corrigé. Si le retournement donne encore une différence, elle est incomparablement moindre, et en peu d'essais on parvient enfin à la détruire.

Alors, la colonne CC' se trouve amenée dans un plan vertical, perpendiculaire à la direction du rayon CV. Mais cela ne suffit point encore pour que cette colonne soit verticale, car elle peut encore pencher vers V' ou vers V'' : aussi, en dirigeant le limbe dans chacun de ces azimuths successivement, trouve-t-on toujours qu'il dévie dans des sens opposés, et d'une quantité égale. Ainsi, en élevant l'une des vis et abaissant l'autre de quantités égales, on doit rétablir la verticalité, et trouver le niveau exact dans tous les sens sans qu'il soit nécessaire d'y toucher ; c'est, en effet, ce qui arrive. Mais comme on n'opère jamais ce partage d'une manière bien exacte, il s'ensuit que le premier rayon CV ne conserve pas tout-à-fait son horisontalité après ces opérations. On

Digitized by Google

recommence donc de nouveau, en partant de ce rayon, à rétablir la verticalité de l'axe. Mais cette fois les corrections sont incomparablement moindres, et avec un peu d'habitude, on parvient à rendre l'axe vertical après deux ou trois essais. Alors le niveau reste horisontal, dans quelque azimuth que l'on dirige le limbe. L'opération que nous venons de décrire se fait ordinairement avant toutes les autres vérifications, parce qu'elles ne sont jamais si faciles que quand l'axe est vertical; mais pourtant comme cette opération n'est pas de nécessité rigoureuse, je ne l'ai pas décrite d'abord.

267. Lorsque toutes ces vérifications sont faites, si l'on attache les pinces sur le limbe, et qu'on y suspende le fil à-plomb, il devra battre sur les points de repère, *P* et *Q*, dans quelque azimuth qu'on le place, et, en même tems, le grand niveau parallèle et le petit niveau perpendiculaire au limbe doivent conserver leur horisontalité sans aucun dérangement. Cette dernière vérification embrasse et confirme toutes les autres.

268. Il ne reste plus qu'à régler l'axe optique de la lunette. Cela se fait au moyen de la lunette d'épreuve, comme on l'a expliqué pour le mural dans la page 86. Si l'on n'avait pas de lunette d'épreuve, on pourrait y suppléer au moyen du cercle azimuthal qui sert de base à la colonne et qui est ordinairement divisé comme le cercle vertical. Voici en quoi le procédé consiste: dirigez la lunette sur un point très-éloigné et situé à l'horison ou très-près de l'horison; pour cela, une différence de dix ou douze degrés n'est d'aucune conséquence. Lisez sur le cercle azimuthal le nombre de degrés et minutes auquel répond l'index de la colonne, ou, pour plus d'exactitude, choisissez le point de mire de manière que cet index réponde à une division exacte,

Digitized by Google

tellement que l'on puisse répondre de sa position à très-peu près. L'azimuth étant bien lu, faites tourner la colonne d'une demi-circonférence, en sorte que l'index qui répondait d'abord à l'azimuth A, réponde maintenant à l'azimuth $A + 200^g$, et après l'avoir mis bien exactement dans cette position, fixez-le au moyen de sa vis de pression, d'une manière invariable. Par cette opération, votre lunette s'est retournée ; détachez-la, et la faisant glisser sur le limbe, ramenez-la sur le point de mire, précisément comme si vous vouliez prendre sa distance au zénith dans une observation pairé. Si l'axe optique de la lunette est parallèle au plan du limbe, vous devez retrouver le point de mire à l'intersection des fils. Mais si cet axe a la plus petite inclinaison, comme dans le retournement il décrit une surface conique, autour de l'axe central perpendiculaire au limbe, le point de mire ne pourra plus se retrouver à l'intersection des fils : il s'en écartera à droite ou à gauche. Si l'axe optique s'approche réellement du limbe du côté de l'objectif, le point de mire paraîtra s'en éloigner. Au contraire si cette extrémité de l'axe optique s'éloigne du limbe, le point de mire paraîtra s'en rapprocher, parce que les lunettes renversent ; et comme le plan du limbe se trouve toujours dans le même vertical, l'écart apparent du point de mire est double de l'erreur produite par l'inclinaison de l'axe optique. C'est ce que montre la *fig.* 66, où ACB représente le plan vertical du limbe, $E'CO'$ la première direction de la lunette vers l'objet O', qui répond au centre des fils, $L''CO''$ la direction de la lunette après le retournement, et $O'O''$ l'écart de l'objet O' par l'effet de l'inclinaison de l'axe optique sur le plan du limbe, écart double de $O'B$ qui représente l'effet réel de cette inclinaison.

Digitized by Google

Voulez-vous mesurer cette erreur, détachez l'index du cercle azimuthal, de manière que vous puissiez faire tourner la colonne, et ramenez ensuite l'intersection des fils sur le point de mire ; l'angle parcouru par l'index sur le cercle azimuthal, sera égal à l'angle $O''CO'$, et, par conséquent, double de l'erreur $O''CB$, en supposant que l'objet soit à l'horison. Si cette dernière condition n'était pas remplie, l'angle parcouru sur le cercle azimuthal serait la projection horisontale de l'angle réel. Si j'ai choisi l'objet à l'horison, c'est afin que l'opération donnât tout de suite cette mesure.

Mais au lieu de mesurer l'erreur, veut-on la corriger? Il n'y a qu'à ramener les fils du micromètre vers le point de mire, et les faire ainsi marcher jusqu'à ce que l'on ait détruit la moitié de l'écart. Si l'on a fait exactement cette bissection, l'axe optique sera devenu parallèle au plan du limbe. Mais comme on n'est jamais sûr d'y parvenir dès la première fois, on recommence la vérification avec cet axe optique bien réglé ; et en peu d'essais, on parvient à obtenir le parallélisme, avec tout le degré d'exactitude nécessaire, degré que le calcul détermine, comme on le verra dans les notes que nous avons placées ici (*).

(*) Apprécions l'erreur qui pourrait résulter d'un défaut de parallélisme de l'axe optique. Pour cela, concevons un rayon visuel mené à l'objet observé, et passant par l'axe optique de la lunette. L'angle de ce rayon avec la verticale sera la distance vraie au zénith ou Z; mais la distance apparente Z', telle qu'on la lira sur le limbe, ne sera que la projection de la précédente sur le plan du limbe, au moyen d'un arc de cercle perpendiculaire à son plan. Cet arc mesurera donc l'inclinaison de l'axe optique sur le plan du limbe. Soit I cette inclinaison; il est visible que les angles Z, Z' et I, sont les trois côtés d'un triangle sphérique rectangle, dont Z est l'hypothénuse

Je saisis cette occasion de faire remarquer encore une fois que l'exactitude des procédés astronomiques est toujours fondée sur une suite d'essais et d'approximations successives. Cela est également vrai pour les résultats des calculs astronomiques, comme on le verra dans la suite de cet ouvrage; et le même principe, transporté dans les autres sciences, offre également le plus sûr moyen, je dirais presque le seul, de parvenir à une grande précision.

Au moyen des vérifications que nous venons de décrire, le cercle est complètement réglé, et on peut immédiatement s'en servir pour les observations. Toutes ces vérifications sont plus longues à expliquer qu'à faire, lorsqu'on est habitué à l'usage du cercle.

---

et par conséquent, dans lequel on aura, comme tout-à-l'heure,

$$\cos Z = \cos Z' \cos I.$$

Cette équation est absolument de même forme que celle que nous avons trouvée pour la verticalité du limbe. On en tirera donc de même, par une approximation toujours suffisante,

$$\sin \tfrac{1}{2} \left\{ Z - Z' \right\} = \frac{\sin^2 \frac{1}{2} I}{\operatorname{tang} Z'}.$$

La même table qui sert pour l'erreur de la verticalité, servira donc encore pour l'erreur de l'axe optique. Cette dernière est encore plus petite que l'autre, du moins ordinairement, car il est très-facile d'éviter, sur l'inclinaison de l'axe optique, 1′ d'erreur, et l'effet en serait insensible sur les distances au zénith où l'on a coutume d'observer avec le cercle répétiteur. On voit que cet effet tend aussi à diminuer les distances au zénith, puisque la distance Z' lue sur le limbe est moindre que la distance réelle Z.

Si l'on avait mal réglé l'axe optique, ou si l'on avait observé trop loin de cet axe, on pourrait toujours, au moyen de la formule précédente, corriger les observations.

Digitized by Google

269. Il me reste maintenant à expliquer comment, lorsqu'on observe les hauteurs des astres au cercle répétiteur, on peut éluder les effets du mouvement diurne, et opérer absolument comme si l'astre était immobile.

D'abord, en faisant ces observations, on ne peut ordinairement avoir que deux objets; de trouver l'heure par le moyen de la hauteur observée, ou de trouver la hauteur méridienne de l'astre. Examinons successivement ces deux cas.

Pour avoir l'heure, il faut déterminer l'angle horaire par le moyen de la hauteur observée. Il est donc avantageux d'observer loin du méridien, parce qu'alors les hauteurs des astres varient plus rapidement; tandis qu'en approchant du méridien, elles deviennent presque constantes, et une très-petite variation dans la hauteur, répond à une grande différence d'angle horaire, de sorte qu'une erreur fort petite sur l'observation de la hauteur en introduirait une considérable sur le tems absolu. Le calcul fait voir que le mouvement en hauteur est le plus rapide lorsque l'azimuth est de 100s. Alors l'astre se trouve dans le plan vertical qui contient les points d'est et ouest, et que l'on nomme ordinairement *premier vertical.* C'est donc sur-tout dans cette position qu'il est avantageux d'observer les distances au zénith, pour en conclure le tems. Mais tous les astres ne peuvent pas satisfaire à cette condition, car il y en a toujours beaucoup d'entre eux qui ne passent jamais au premier vertical. Heureusement cette condition n'est pas non plus rigoureusement nécessaire, et lorsque les circonstances ne permettent pas de s'y astreindre, ce qui arrive fort souvent, il faut seulement choisir l'instant de l'observation et la hauteur de l'astre, de manière que les variations de la hauteur soient assez rapides pour que

Digitized by Google

les erreurs inévitables des observations n'y soient pas considérablement agrandies, quand on en déduit l'angle horaire. Il est toujours très-facile de déterminer, pour chaque astre, les limites convenables, en calculant d'avance les petits changemens d'angle horaire qui correspondent à de très-petites variations de hauteur. En général, on sent qu'il faudra, autant que possible, choisir des étoiles situées près de l'équateur, afin que leur mouvement diurne soit plus rapide, et éviter les étoiles circompolaires, dont le mouvement est trop lent (*).

(*) Soit Δ la distance polaire de l'astre que l'on observe, P son angle horaire, Z sa distance zénithale, D la distance du zénith au pôle, ou le complément de la latitude du lieu; cela posé, dans le triangle sphérique formé par les trois arcs Δ, Z et D, on aura l'angle horaire P, par la formule

$$\cos P = \frac{\cos Z - \cos \Delta \cos D}{\sin \Delta \,.\, \sin D}.$$

Supposons qu'au bout de quelques minutes, la distance zénithale devienne Z', et l'angle horaire P', Δ et D restant les mêmes, on aura encore

$$\cos P' = \frac{\cos Z' - \cos \Delta \,.\, \cos D}{\sin \Delta \,.\, \sin D};$$

retranchant ces deux équations l'une de l'autre, on a

$$\cos P' - \cos P = \frac{\cos Z' - \cos Z}{\sin \Delta \,.\, \sin D},$$

ou, en transformant ces expressions,

$$\sin \tfrac{1}{2} \left\{P' + P\right\} \sin \tfrac{1}{2} \left\{P' - P\right\} = \frac{\sin \tfrac{1}{2}\left\{Z' + Z\right\} \sin \tfrac{1}{2}\left\{Z' - Z\right\}}{\sin \Delta \,.\, \sin D}.$$

Si les observations sont assez rapprochées pour que les différences

Digitized by Google

270. Supposons donc que l'on ait eu précautions diverses : on observe les distan au zénith, comme on ferait s'il était fixe ; n observation, soit paire, soit impaire, on not l'heure, la minute, la seconde et la fraction l'astre s'est placé au centre des fils. Chaque cou tions exige au plus deux minutes, quelquefo selon l'habileté de l'observateur. De tems e fin d'une observation paire, on lit sur le parcouru.

$P' - P$ et $Z' - Z$ puissent être considérées comm on pourra substituer le rapport des arcs à celui des aura

$$P' - P = \frac{Z' - Z \,.\, \sin \frac{1}{2} \left\{ Z' + Z \right\}}{\sin \frac{1}{2} \left\{ P' + P \right\} \sin \Delta \sin D}$$

de plus, si l'on néglige les carrés et les puissances ces petites quantités, on pourra, dans le facteur si qui multiplie déja $Z' - Z$ dans le second membre, su et $P = P'$, ce qui donnera

$$P' - P = \left\{ Z' - Z \right\} \frac{\sin Z}{\sin P \,.\, \sin \Delta \,.\, \sin}$$

Les circonstances les plus favorables à la détermina horaire, sont celles qui donnent à $P' - P$ les plus $Z' - Z$ restant le même ; car alors une petite erreur peu sur P. Il faut donc, pour l'exactitude, que $\frac{\sin Z}{\sin P \sin \Delta \,.\, \sin D}$ soit le plus petit possible ; et co ment à une même étoile et à un même observateur constans, la condition ne porte que sur le facteur si

Digitized by Google

271. Lorsque l'on fait la lecture des arcs, après chaque couple d'observations, leur intervalle étant supposé de deux minutes sexagésimales, on s'apperçoit que, dans l'intervalle de huit ou dix minutes, les hauteurs observées croissent proportionnellement au tems, de sorte que la moyenne des hauteurs correspond exactement à l'époque moyenne, au moins quand on observe assez loin du méridien, comme nous l'avons indiqué. Ceci bien prouvé, on se dispense de lire les arcs à la fin de chaque observation paire, ce qui entraîne des longueurs. On lit après six ou huit observations : en un mot, après un nombre de couples qui comprennent huit ou dix minutes de tems : on nomme cet assemblage *une série*, et on fait répondre l'époque moyenne des observations à l'arc moyen parcouru sur le limbe. Mais si l'on prolongeait une même série plus

---

le triangle sphérique formé par les trois arcs Z, Δ et D, si l'on nomme A l'azimuth opposé au côté Δ, on aura $\frac{\sin Z}{\sin P} = \frac{\sin \Delta}{\sin A}$, et comme Δ est constant, on voit que la condition imposée sera remplie, lorsque $\sin A$ sera le plus grand possible, pour l'astre que l'on observe; par conséquent si l'astre peut, d'après sa position, passer au premier vertical, le *maximum* aura lieu quand il y parviendra, car alors l'azimuth A sera égal à un angle droit.

On voit aussi que pour la même étoile, il faut éviter les angles horaires trop petits, qui rendent le dénominateur $\sin P$ ou $\sin A$ une très-petite fraction, et par conséquent augmentent la valeur du rapport $\frac{\sin Z}{\sin P}$ ou $\frac{\sin \Delta}{\sin A}$. Quant au choix à faire entre les diverses étoiles, comme toutes ne peuvent pas passer dans le premier vertical, on voit qu'il faut éviter celles dont la distance polaire Δ est trop petite, et s'attacher à celles pour lesquelles le sinus de cette distance est le plus grand possible, ce qui a lieu pour les étoiles situées dans le plan de l'équateur, où Δ est égal à un angle droit.

Digitized by Google

longtems, ou si l'on observait très-près du méridien, cette méthode serait inexacte, comme l'expérience et le calcul s'accordent également à le prouver (*).

(*) Tout cela se voit aisément par la formule

$$Z' - Z = P' - P \cdot \frac{\sin P \cdot \sin \Delta \cdot \sin D}{\sin Z},$$

que nous avons trouvée dans la page précédente. Cette formule suppose que l'on part d'une première valeur de P et de Z, pour passer à d'autres extrêmement voisines, P' et Z'. Elle fait connaître le changement $Z' - Z$ de la distance au zénith, lorsque l'on connaît la variation $P' - P$ de l'angle horaire, laquelle peut se conclure du tems écoulé entre les deux observations. Tant que les différences $Z' - Z$ et $P' - P$ pourront être supposées très-petites, ces différences seront sensiblement proportionnelles entre elles, et la moyenne arithmétique des distances zénithales correspondra à la moyenne arithmétique des angles horaires, ou des époques des observations. Mais par cela même, on conçoit que cette supposition est limitée, et ne peut être admise que pour un tems très-court.

Veut-on juger, dans chaque cas, de son exactitude et de l'étendue que l'on peut lui donner sans craindre d'erreur sensible? Il n'y a qu'à partir d'une valeur donnée de Z et de P, par exemple, de la distance moyenne observée pendant une série, et de l'angle horaire moyen, que l'on en peut conclure au moyen du triangle sphérique, par la formule rigoureuse

$$\cos P = \frac{\cos Z - \cos \Delta \cos D}{\sin \Delta \sin D}.$$

Puis on supposera dans l'angle horaire un changement égal à la moitié de l'intervalle d'une série, par exemple, à 5′ de tems sexagésimal, si les séries sont de 10 minutes, ce qui étant réduit en arc, fait un changement de 1°.15′ sexagésimales sur P, alors, avec la nouvelle valeur $P' = P + 1°.15'$, on calculera la nouvelle distance Z' par la formule rigoureuse

$$\cos Z' = \cos P' \cdot \sin \Delta \cdot \sin D + \cos \Delta \cos D;$$

Digitized by Google

272. Ayant ainsi la distance moyenne de l'astre au zénith et l'époque moyenne qui y correspond en tems de la pendule, on résoudra, avec cette distance, le triangle sphérique qui donne l'angle horaire. Cet angle réduit en tems sydéral, donnera le nombre d'heures, minutes et secondes sydérales compris entre l'époque des observations et le passage de l'astre au méridien. Si dans ce calcul on a soin de compter les angles horaires à partir du méridien supérieur, et dans le sens du mouvement diurne, depuis zéro jusqu'à la circonférence entière; il suffira d'ajouter l'angle horaire calculé à l'ascension droite de l'astre réduite en tems, et la somme sera l'angle horaire du point ♈ de l'équateur ou *l'heure sydérale*, § 129. Il est entendu qu'avant d'employer la distance zénithale observée, pour calculer l'angle horaire, il faut la corriger de la réfraction. Quant à la distance

---

on aura donc ainsi Z', et par suite $Z' - Z$: on pourra donc comparer cette valeur à celle qui résulte de la formule approchée

$$Z' - Z = P' - P . \frac{\sin P . \sin \Delta \sin D}{\sin Z} :$$

si elles s'accordent à très-peu près, de manière qu'il n'en résulte pour $Z' - Z$ qu'une différence insensible, par exemple, $\frac{1}{100}$ de seconde, on pourra, sans scrupule, employer la formule approchée, dans tout l'intervalle d'une série, et, par conséquent, regarder la distance moyenne lue sur le limbe, comme correspondante à l'époque moyenne des observations. Mais si les deux valeurs de $Z' - Z$ s'écartent trop l'une de l'autre pour que l'on puisse négliger leur différence, on en conclura que l'on a trop prolongé les séries, et, par conséquent, il faudra resserrer leurs limites. Dans ce calcul, il faut partir de l'époque moyenne, comme la plus favorable, parce qu'étant moins éloignée des extrêmes, elle prolonge moins la proportionnalité des angles horaires et des hauteurs.

Digitized by Google

polaire de l'astre, qui est aussi un des él
calcul, on la prend dans les catalogues astı
par exemple dans la Connaissance des tems,
ces catalogues ne donnent que la *position*
l'astre ; on y fait les petites corrections relati
cession à l'aberration et à la nutation, pour
en *position apparente.*

273. Si l'astre observé est le soleil, l'angle
observé et compté de midi ou de minuit dor
solaire. Les astronomes français se conforma
établi généralement dans la société, compter
à partir du méridien inférieur ou de minuit
ainsi, sans interruption, de zéro à 24 heures se
ou de zéro à 10 heures décimales, selon qu'i
la division sexagésimale ou décimale du tems.

Comme le disque du soleil a un diamètre :
ne peut pas, dans les observations consécı
son centre comme pour une étoile, et le pl
fil. On élude la difficulté en mettant une fı
le bord supérieur et une fois sur le bord ir
ce moyen, une des distances est trop petit
demi-diamètre du disque, mais la suivante est
de la même quantité ; et comme les obs
cercle répétiteur se font toujours en nomb
s'ensuit qu'il s'opère toujours, dans chaque
exacte compensation. Le même artifice s'ap
l'on observait une planète, ou même la lune. I
inutile de rappeler que, pour observer le sol
devant l'oculaire un verre noirci, et que p
les autres astres de nuit, il faut éclairer les fil
mètre, excepté pour la lune dont l'éclat suffi

274. Lorsqu'on observe des étoiles, il est
ficile et même impossible de les mettre exa

Digitized by Google

centre des fils, comme on devrait le faire, pour que leurs images se trouvassent précisément dans l'axe optique de la lunette. La difficulté vient de ce que les fils se croisent à ce centre, ce qui accroît leur épaisseur, ou plus exactement la place que leur image occupe sur le fond de l'objectif. Alors quand on met l'étoile derrière le centre des fils, il arrive souvent qu'elle se trouve cachée toute entière, et que l'on ne pourrait pas répondre de la remettre toujours exactement au même point derrière les fils. On évite cet inconvénient en n'observant pas à la croisée même des fils, mais à une très-petite distance, sur le fil horisontal. Mais comme malgré tout le soin de l'artiste il est impossible que ce fil n'ait pas quelque petite inclinaison, on tâche d'éluder cet effet en observant toujours au même point du fil, ou au moins sur des points très-peu éloignés. Pour cela, si, dans la première observation, la lunette étant supposée à droite de l'observateur, on a mis l'étoile un peu à droite du centre des fils, ce qui la met réellement un peu trop près du limbe, puisque nos lunettes renversent, on la place ensuite un peu à gauche de ce centre dans la seconde observation, où la lunette est à gauche, ce qui la met réellement trop près du limbe, comme la première fois. Alors il se trouve qu'on a toujours rapporté l'astre au même point physique du fil, ou à une si petite distance, que l'effet de l'inclinaison du fil, dans ce court intervalle, n'a presque aucune influence sur la hauteur observée. A la vérité, on s'écarte de quelques secondes à droite ou à gauche de l'axe optique; mais l'erreur est tout-à-fait insensible, comme on peut le prouver par les formules que nous avons données précédemment, pag. 290, pour mesurer cette erreur.

275. La méthode que nous venons d'exposer est celle des *hauteurs absolues*. Elle n'était pas praticable avec les

Digitized by Google

anciens quarts-de-cercle, qui ne donnaient pas les dis tances au zénith avec assez d'exactitude, à cause de erreurs de division dont ils étaient presque toujours af fectés. On recourait donc plus ordinairement à la mé thode des hauteurs correspondantes, que nous avon expliquée dans la pag. 79. Maintenant, celle des hauteu absolues est la plus exacte de toutes, graces à l'inventio du cercle répétiteur, qui permet de mesurer ces hauteu avec la dernière précision. On peut augmenter encor ses avantages en observant plusieurs séries d'un mêm astre, et les prenant de part et d'autre du méridien ce qui évite toutes les erreurs d'ascension droite, affaiblit même celles de la réfraction. Avec tous c soins, j'ose affirmer que le cercle répétiteur offre l moyen le plus sûr de déterminer le tems, soit absolu soit relatif, et je ne doute point qu'il ne l'emporte cet égard même sur la lunette méridienne.

Pour compléter ces notions, j'ai placé, dans les notes deux exemples de calculs du tems absolu, par les hau teurs d'une étoile et du soleil. La pratique de ce procéd est indispensable, car la détermination du tems est la ba de tout calcul astronomique, et les moyens de l'obten avec rigueur sont si faciles, qu'on ne serait pas excusab de ne pas les employer dans les occasions où cela devie nécessaire.

276. L'autre genre d'observations que l'on peut fai avec le cercle répétiteur, c'est la mesure de la hautei méridienne des astres. Pour cela, peu d'instans avant qu l'astre passe au méridien, on commence une série distances au zénith, que l'on continue jusqu'après passage, à une distance à-peu-près égale. La distan moyenne, donnée par cette série, diffère peu de la di tance méridienne. Cependant elle ne lui est pas tout-

fait égale ; puisque celle-ci, dans les passages supérieurs, est la plus petite, et dans les inférieurs, la plus grande de celles que l'on peut observer. Mais en marquant avec exactitude l'heure, la minute, la seconde et la fraction de seconde où chaque observation particulière a été faite, et connaissant d'ailleurs l'époque précise du passage de l'astre au méridien et sa distance polaire, on sait calculer la correction que chaque distance nécessite. Cette correction n'est plus simplement proportionnelle aux variations de l'angle horaire, comme dans les hauteurs observées loin du méridien. Elle est proportionnelle au carré du sinus de la moitié de l'angle horaire. Dans les passages supérieurs, elle est soustractive des distances au zénith, parce qu'alors la distance méridienne est la plus petite de toutes ; dans les passages inférieurs, elle est additive par une raison contraire (*). Comme l'arc parcouru sur le limbe est égal

---

(*) On a vu dans la note de la page 292, que les distances successives d'un astre au zénith, et les angles horaires qui y correspondent, sont liés entre eux par la relation suivante,

$$\sin\tfrac{1}{2}\left\{Z'+Z\right\}.\sin\tfrac{1}{2}\left\{Z'-Z\right\}=\sin\Delta.\sin D.\sin\tfrac{1}{2}\left\{P'+P\right\}\sin\tfrac{1}{2}\left\{P'-P\right\}.$$

Supposons que Z représente la distance méridienne, et Z' une distance observée très-près du méridien, en sorte que $Z'-Z$ soit une très-petite quantité, que nous nommerons δ, laquelle sera positive dans les passages supérieurs où Z' surpasse Z, et négative dans les passages inférieurs où Z surpasse Z'. Supposons encore que l'on compte les angles horaires à partir du méridien où l'on observe le passage ; l'angle horaire P, correspondant à la distance Z, sera nul, et l'angle horaire P' correspondant à Z', sera fort petit. En faisant ces substitutions dans la relation précédente pour la rendre applicable aux distances méridiennes, elle deviendra

$$\sin\left\{Z+\tfrac{1}{2}\delta\right\}.\sin\tfrac{1}{2}\delta=\sin\Delta.\sin D.\sin^2\tfrac{1}{2}P',$$

à la somme de toutes les distances observées, on y applique la somme de toutes les corrections, dans le sens convenable, et on a autant de fois la distance moyenne qu'il y a d'observations dans la série; de sorte que, pour trouver cette distance, il suffit de diviser la somme des arcs

---

ou, en développant le premier facteur,

$$\sin Z \sin \delta + 2 \cos Z \sin^2 \tfrac{1}{2} \delta = 2 \sin \Delta \,.\, \sin D \,.\, \sin^2 \tfrac{1}{2} P'.$$

La valeur exacte de $\sin \delta$ peut s'exprimer en une série convergente, ordonnée suivant les puissances de $\sin^2 \frac{1}{2} P'$; mais on peut, sans aucun calcul, obtenir le premier terme de ce développement, qui suffit presque toujours. Car en remarquant que $\sin \delta$ et $\sin \frac{1}{2} \delta$ sont des fractions très-petites, on voit que le carré de la dernière, ou $\sin^2 \frac{1}{2} \delta$, sera beaucoup plus petit que $\sin \delta$; ainsi, en négligeant ce carré, dans une première approximation, on aura simplement

$$\sin \delta = \frac{2 . \sin \Delta \,.\, \sin D \,.\, \sin^2 \frac{1}{2} P'}{\sin Z}.$$

On peut encore simplifier cette expression, ou du moins en rendre le calcul plus commode, en remarquant que δ étant un très-petit arc, on peut, sans erreur sensible, supposer la proportion . . . . $\sin 1'' : \sin \delta :: 1'' : \delta$, c'est-à-dire, que l'on peut substituer à $\sin \delta$ l'expression $\frac{\delta}{1''} . \sin 1''$, alors on aura

$$\delta = \frac{\sin \Delta \,.\, \sin D}{\sin Z} \quad \frac{2'' . \sin^2 \frac{1}{2} P'}{\sin 1''}.$$

C'est la valeur de la correction demandée, qui se trouve ainsi exprimée en secondes. Comme on a, en général, $Z' - Z = \delta$, on aura la distance méridienne $Z = Z' - \delta$. Pour établir la continuité entre les expressions algébriques, il faut compter la distance polaire Δ en allant du méridien supérieur au méridien inférieur, depuis 0° jusqu'à la circonférence entière; alors, dans tous les passages supérieurs, Δ sera moindre que deux angles droits, $\sin \Delta$ sera positif, et la correction δ, par le seul jeu de la formule, restera positive et par conséquent se retranchera des distances au zénith observées. Au

Digitized by Google

et des corrections par leur nombre. Ou, ce qui revient au même, on prend la moyenne des distances observées, on y applique la moyenne de toutes les corrections, et on a la distance méridienne telle qu'on l'aurait observée immédiatement. Le complément de cette distance est la hauteur méridienne.

277. Ce procédé semble impliquer un cercle vicieux. Car, pour calculer les corrections dont nous venons de parler, il faut déjà connaître la distance polaire de l'astre, sa distance méridienne Z, et la distance D du pôle au zénith. Or, c'est ordinairement pour trouver une de ces choses que l'on fait les observations dont nous parlons ici. Mais on remarquera que la connaissance exacte de ces élémens n'est pas du tout nécessaire ; il suffit de leur valeur, même grossièrement approchée. Car les erreurs

---

contraire, dans les passages au méridien inférieur, Δ étant plus grand que deux angles droits, $\sin\Delta$ deviendra négatif, δ changera de signe et s'ajoutera aux distances zénithales.

Pour faciliter le calcul de ces corrections, on a construit des tables qui donnent immédiatement les valeurs du facteur $\frac{2''.\sin^2\frac{1}{2}P'}{\sin 1''}$, calculées de seconde en seconde, pour 30′ de tems sexagésimal, avant et après le passage au méridien, c'est-à-dire, pour 7°.30′ en arc, ce qui est l'intervalle le plus considérable que les observations puissent embrasser, même pour la polaire. On trouvera cette table à la fin du livre. On y prend les valeurs du facteur, correspondantes aux époques des observations, on en fait la somme, et on la divise par le nombre des observations. Puis on multiplie ce résultat par le facteur $\frac{\sin\Delta.\sin D}{\sin Z}$, qui est constant pour toutes les séries du même astre, et l'on a la correction moyenne qu'il faut appliquer à la distance observée, dans le sens convenable, selon ce que nous avons dit plus haut. On trouvera aussi un exemple de ce calcul dans les notes.

Digitized by Google

que l'on y peut commettre sont considérablement atténuées, parce que, dans l'expression de la réduction au méridien, elles se trouvent multipliées par le carré du sinus de la moitié de l'angle horaire, quantité qui est toujours une fraction extrêmement petite tant qu'on ne s'écarte pas beaucoup du méridien. De sorte que l'influence de ces erreurs sur la valeur de la réduction que nous nommerons δ devient tout-à-fait insensible. C'est pourquoi, si l'astre observé est connu, il suffira de prendre sa distance polaire dans la Connaissance des tems ou dans les cartes célestes. Et si de plus, on connaît à-peu-près la latitude ou la distance D du pôle au zénith, on en conclura une valeur de Z, c'est-à-dire de la distance méridienne, suffisamment approchée pour calculer la petite réduction δ. Mais si la latitude n'est point connue, même approximativement, on n'a qu'à employer d'abord pour Z la distance moyenne observée, sans autre correction que celle de la réfraction; avec cette valeur et celle de la distance polaire Δ, qui est supposée connue, on calculera D, ou la distance du pôle au zénith. Au moyen de ces valeurs approchées, on obtiendra celles de δ, ou les corrections à faire aux observations pour avoir la vraie distance méridienne; et recommençant le calcul avec cette distance corrigée, on en tirera une valeur de D plus exacte. Alors ces élémens seront connus avec assez de précision pour qu'on puisse les employer au calcul définitif de la réduction au méridien.

A la vérité, nous empruntons encore ici des tables la distance polaire de l'astre. Dans l'état actuel de l'astronomie, ces distances sont connues, pour les principales étoiles, avec une extrême précision. Mais si l'astre observé était inconnu, il faudrait au moins supposer que l'on connaît la latitude du lieu où l'on observe, et par conséquent, la distance du pôle au zénith. Alors, avec cette distance

Digitized by Google

et la valeur observée de Z, on calculerait approximativement la valeur de Δ, ce qui suffirait pour avoir les corrections δ, et par suite Z et Δ avec plus d'exactitude, au moyen d'un second calcul, comme dans le cas précédent.

Enfin, si l'on voulait que l'observateur tirât tout de ses propres observations, il faudrait d'abord qu'il déterminât approximativement la latitude, par les passages supérieurs et inférieurs des étoiles circompolaires, ce qui n'exige point la connaissance de la distance polaire; après quoi il s'occuperait des autres astres. Telle est la marche d'invention que nous avons suivie dans l'arrangement des précédens chapitres; mais dans l'application, il faut profiter de tout ce qui est déja connu.

278. Nous avons supposé que les angles horaires correspondans à chaque observation sont donnés en tems par l'horloge. Pour cela, il faudrait que l'horloge suivît exactement le tems sydéral, si c'est une étoile qu'on observe; le tems solaire, si c'est le soleil; et en général, que sa marche fût conforme à celle de l'astre observé. Il est presqu'impossible que cette condition soit remplie à la rigueur, mais elle n'est pas indispensable; il suffit que le mouvement de l'horloge soit bien connu, et on le réduit à ce qu'il devrait être, au moyen du calcul. Si ce mouvement s'écarte peu de la marche de l'astre, il n'en résulte qu'une petite correction très-facile à faire sur le résultat définitif (*).

(*) La réduction au méridien a pour expression

$$\delta = \frac{\sin\Delta \quad \sin D}{\sin Z} \cdot \frac{2''.\sin^2 \frac{1}{2} P'}{\sin 1''}.$$

Supposons que pendant une révolution diurne de l'astre, l'hor-

Digitized by Google

Il est presque inutile d'ajouter que si l'astre observé a un diamètre sensible, il faut mettre alternativement le fil en contact avec son bord supérieur et son bord inférieur. Nous avons déja indiqué cette précaution dans l'article 273.

---

loge marque $24^h - r$, r étant un petit nombre d'oscillations. Soit T' un des angles horaires observés en tems de l'horloge, c'est-à-dire, le nombre d'oscillations écoulées entre cette époque et le passage de l'astre au méridien; il est visible que cet angle horaire, converti en arc, n'aura pas pour valeur $15\,T'$, comme cela devrait être si l'horloge et l'astre étaient d'accord. Avant de faire cette conversion, le nombre T' devra être modifié dans le rapport de la marche de l'horloge à celle de l'astre, c'est-à-dire, dans le rapport de $24^h - r$ à 24^h, et en multipliant le résultat par 15, la valeur de l'angle horaire exprimée en arc deviendra $\frac{15\,T' . 24^h}{24^h - r}$, ou, en réduisant tout en secondes sexagésimales, ... $15\,T' + \frac{15\,T' . r}{86400 - r}$; telle serait donc la valeur de P' qu'il faudrait employer dans le calcul de la correction δ; de sorte qu'en faisant, pour plus de simplicité, $15\,T' = p'$ et $\frac{r}{86400 - r} = r'$, on aurait

$$P' = p' + p'r';$$

mais en substituant cette valeur dans l'expression de δ, on peut profiter de ce que r' est une quantité fort petite pour la simplifier beaucoup; en effet, on a

$$\sin\tfrac{1}{2}P' = \sin\left\{\tfrac{1}{2}p' + \tfrac{1}{2}p'r'\right\} = \sin\tfrac{1}{2}p' \cos\tfrac{1}{2}p'r' + \cos\tfrac{1}{2}p' . \sin\tfrac{1}{2}p'r'.$$

En élevant cette expression au carré, bornons-nous à la première puissance de $\sin\frac{1}{2}p'r'$, et négligeons les autres comme exprimant des fractions trop petites, nous aurons

$$\sin^2\tfrac{1}{2}P' = \sin^2\tfrac{1}{2}p' + \frac{\sin p' . \sin p'r'}{2}.$$

Digitized by Google

Mais, ce qu'il importe beaucoup plus de remarquer, si l'astre observé avait un mouvement propre en déclinaison, il serait nécessaire d'y avoir égard; car la distance méridienne qui se déduit de chaque observation partielle au moyen des réductions précédentes, est celle

---

Le second terme de cette valeur étant extrêmement petit à cause de la petitesse des arcs p' et $p'r'$, on peut, sans erreur sensible, lui substituer $2r' . \sin^2 \frac{1}{2} p'$; ce qui revient à mettre $2 \sin \frac{1}{2} p'$ au lieu de $\sin p'$, et $2r' \sin \frac{1}{2} p'$ au lieu de $\sin p' r'$. On obtient alors cette expression fort simple

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} P' = \left\{1 + 2r'\right\} \sin^2 \tfrac{1}{2} p',$$

ce qui donne

$$\delta = \frac{\sin \Delta . \sin D . \left\{1 + 2r'\right\}}{\sin Z} . \frac{2'' \sin^2 \frac{1}{2} p'}{\sin 1''}.$$

Par cet artifice, chaque correction, calculée d'après l'angle horaire vrai, se trouve dans un rapport constant avec celle que l'on aurait en employant dans le calcul l'angle horaire donné immédiatement par l'horloge. Il en résulte seulement un terme de plus dans le facteur constant, commun à toutes les réductions. Ainsi, quand l'horloge ne suivra qu'à-peu-près la marche de l'astre observé, on effectuera tous les calculs comme si elle le suivait exactement; on prendra dans les tables les valeurs du facteur $\frac{2'' \sin^2 \frac{1}{2} p'}{\sin 1''}$ comme à l'ordinaire, avec la seule précaution de tenir compte du facteur $1 + 2r'$; dans la valeur de δ. Ou, si l'on veut, lorsqu'on aura trouvé la correction moyenne de toute la série, telle qu'elle serait si la pendule suivait la marche de l'astre, on lui ajoutera le produit de cette correction par le nombre abstrait $2r'$. Il est clair que r serait négatif, si l'horloge avançait sur l'astre au lieu de retarder, comme on l'a supposé ici. Cette approximation serait encore parfaitement suffisante, quand même on observerait le soleil avec une horloge réglée sur le tems sydéral, ou réciproquement.

Digitized by Google

qui aurait réellement lieu si la déclinaison de l'astre restait toujours la même qu'à l'époque de l'observation. Si cette déclinaison varie, la distance réduite doit différer de la distance méridienne véritable, et la différence doit être égale au changement de la déclinaison, depuis l'époque de l'observation, jusqu'à celle du passage au méridien. C'est pourquoi, si l'on suppose le mouvement en déclinaison uniforme, pendant la durée de la série, il faudra calculer proportionnellement la correction de chaque distance réduite, en raison de l'angle horaire qui y correspond. Ces corrections seront évidemment de signe contraire avant et après le passage au méridien, en supposant, comme cela est le cas ordinaire, que le changement de la déclinaison se continue dans le même sens pendant toute la série ; car alors si ce changement augmente les distances au zénith d'un côté du méridien, il les diminuera de l'autre côté. De là résulte cette règle fort simple. Faites séparément la somme des angles horaires, observés avant et après le passage, ces angles étant exprimés en tems, par exemple, en minutes. Retranchez ces deux sommes l'une de l'autre, divisez leur différence par le nombre des observations, et multipliez le résultat par le mouvement de l'astre, en déclinaison pour une minute de tems, mouvement qui est donné par les tables astronomiques. Le produit sera la correction qu'il faut appliquer à la distance méridienne, calculée d'après l'ensemble de la série, comme si la distance polaire était constante.

279. Une seule série de ce genre faite sur un astre dont on connaît la distance polaire méridienne, suffit pour déterminer la latitude du lieu où l'on observe ; car si l'astre passe au méridien du côté de l'équateur, comme dans la *fig.* 22, en retranchant sa distance méridienne *ZS* de sa distance polaire *PS*, on aura la distance *PZ*

du pôle au zénith. Si, au contraire, l'astre passe au méridien du côté du pôle, comme dans la *fig.* 20, on ajoutera, dans les passages supérieurs, la distance polaire à la distance méridienne, dans les passages inférieurs, on la retranchera. De toute manière, on aura la distance du pôle au zénith, et par suite la latitude qui en est le complément. Parmi les étoiles que l'on peut choisir pour obtenir ainsi la latitude, la polaire est la préférable, parce que c'est celle pour laquelle les réductions au méridien sont les plus petites. Cela tient à la petitesse de sa distance polaire (*). C'est elle aussi qui a été la plus observée, sur-tout dans ces derniers tems ; par conséquent, sa distance polaire est parfaitement connue. On peut encore employer avec sûreté β de la petite ourse, qui a été aussi beaucoup observée par MM. Méchain et Delambre.

280. Lorsque l'on veut déterminer une latitude avec une précision extrême, par exemple, pour la mesure d'une méridienne ou pour le tracé d'une grande carte, on tâche de se rendre indépendant même de la distance polaire. Pour cela, on observe, au cercle répétiteur, les deux passages supérieurs et inférieurs d'une étoile circompolaire, par exemple de la polaire elle-même, ou de β de la petite ourse. On réduit ces observations au méridien avec les valeurs de la distance polaire, les plus exactes que l'on peut se procurer, et on tire de chacune d'elles une distance du pôle au zénith, affectée de toute l'erreur

(*) Cela se voit tout de suite par l'expression de δ, qui contient, à son numérateur, le sinus de la distance polaire. Quant à l'étendue des angles horaires, il convient d'arrêter la série lorsqu'une erreur de 1″ en tems sur P' donnerait une erreur d'une seconde de degré sur la réduction δ.

Digitized by Google

qui peut avoir été commise sur la distance cette erreur agit en sens contraire sur le deux passages. Elle disparaît donc dans leu donne ainsi la distance du pôle au zénith dans leur différence qui donne l'erreur polaire. Cette compensation est toute pa qui se fait dans les distances méridiennes d qu'on observe les deux bords (*).

(*) Soit Z' la moyenne des distances au zénith c passages supérieurs ; Z'' cette moyenne pour les pa D la vraie distance du pôle au zénith, et Δ la véritable : en calculant avec ces valeurs, que nous su on trouverait

Dans les passages supérieurs $D = Z' +$

Dans les passages inférieurs $D = Z'' -$

et ces deux valeurs de D s'accorderaient ensemble. de Δ on emploie $\Delta + e$, e étant l'erreur de la on trouvera nécessairement des valeurs de D, qui plus, et en les nommant D', D'', on aura

Dans les passages supérieurs $D' = Z' +$

Dans les passages inférieurs $D'' = Z'' -$

ou, en mettant $Z' + \Delta$ et $Z'' - \Delta$, leur valeur

$$D' = D + e, \qquad D'' = D - e,$$

d'où l'on tire, par addition et soustraction,

$$D = \frac{D' + D''}{2}, \qquad e = \frac{D' - D''}{2}.$$

Ainsi, quoique l'on ait opéré avec une distance p

Digitized by Google

C'est par ce procédé, uni aux soins de l'exactitude la plus scrupuleuse, que l'on a déterminé la latitude de Paris et celle de plusieurs points situés sur l'arc du méridien, compris entre les parallèles de Formentera et de Dunkerque : c'est, par conséquent, ainsi qu'ont été faites les observations de MM. Méchain et Delambre, rapportées dans le tableau de la page 90.

281. Le cercle répétiteur n'est pas seulement utile dans les observations astronomiques, il sert encore dans les opérations géodésiques, et dans la levée des plans, pour mesurer les angles de position compris entre les objets. Afin de le rendre propre à cet usage, on substitue au grand niveau une seconde lunette, pareillement mobile autour du centre comme la première, mais placée de l'autre côté du limbe; on désengrène celui-ci et on l'amène dans le plan des deux objets dont on veut mesurer l'angle : il y a, pour cela, des vis de rappel dans tous les cercles. Soient, *fig.* 67, S', S'' ces deux objets, et C le centre du cercle. On met la lunette supérieure L' sur le point zéro de la division du cercle; on l'y fixe, et sans la déranger, on fait tourner le limbe jusqu'à ce que le point de l'objet S',

---

la demi-somme des passages observés donne la vraie distance du pôle au zénith, et leur demi-différence fait connaître l'erreur de la distance polaire. L'erreur e influe à la vérité sur le coefficient constant qui entre dans l'expression de la réduction au méridien, mais cette influence est considérablement affaiblie par la fraction $\sin^2 \frac{1}{2} p'$, ainsi que nous l'avons déja remarqué. Au reste, si l'on craignait qu'elle ne fût sensible, on n'aurait qu'à calculer de nouveau les réductions au méridien avec les distances D, corrigées par la comparaison des passages supérieurs et inférieurs; ce qui donnerait ensuite une nouvelle valeur de D, encore plus exacte que la première. Mais dans l'état actuel des catalogues astronomiques, on n'aura jamais besoin de recourir à cette seconde approximation.

Digitized by Google

sur lequel on vise, se trouve au centre des fils. Puis on dirige l'autre lunette, la lunette inférieure L'', sur l'objet à gauche, qui est ici S''. Alors les axes optiques des deux lunettes comprennent entre eux l'angle $S'CS''$, qui est celui des deux objets. Mais comme le point A', où répond la seconde, n'est pas marqué sur le limbe, on ne peut pas lire cet arc. On y supplée en le doublant comme on fait pour éviter la lecture du fil à-plomb dans les observations verticales. Sans toucher aux lunettes, on fait tourner le limbe de manière que la lunette inférieure, qui se trouvait tout-à-l'heure dirigée sur l'objet à gauche, se dirige maintenant sur l'objet à droite. Alors la lunette supérieure prend la direction CL', *fig.* 68. On la détache, l'autre restant fixe, et on la ramène sur l'objet à gauche, ce qui lui donne la position $CA''S''$, *fig.* 69. Dans ce mouvement, il est évident qu'elle a décrit un angle ACA'', précisément double de l'angle compris entre ces deux objets. Ainsi, en lisant cet arc, indiqué par le vernier de la lunette supérieure, sa moitié sera l'angle demandé (*).

282. Veut-on maintenant l'angle quadruple? laissez les lunettes fixes, et faisant tourner le limbe, ramenez par ce

(*) Nous supposons ici la division du limbe tracée de droite à gauche, comme dans la *fig.* 57. Alors en opérant comme nous venons de le dire, la lunette supérieure CL' marche dans le sens des divisions. Mais si le cercle était divisé de gauche à droite, l'arc ainsi parcouru serait le supplément à 400° de celui que le vernier indiquerait. Dans ce cas, il serait un peu plus commode de diriger la lunette inférieure sur l'objet à gauche, et l'inférieure sur l'objet à droite, ce qui obligerait ensuite de faire tourner le cercle de L' vers L'', en sens contraire de ce que nous avons supposé. Au reste, de quelque manière que l'on opère, l'évaluation des arcs n'a aucune difficulté.

Digitized by Google

mouvement la supérieure sur l'objet à droite S' ; puis détachez l'inférieure et amenez-la sur l'objet à gauche S'', *fig.* 70. Alors les circonstances redeviennent absolument les mêmes que dans la première observation : seulement le point de départ de la lunette supérieure sur le limbe n'est plus A, mais A'', c'est-à-dire, l'extrémité de l'arc double parcouru dans le premier couple d'observations. Ainsi, en recommençant à opérer de la même manière, on ajoutera un nouvel arc double au premier, et en multipliant les observations, on aura tel multiple de l'angle que l'on voudra. Quand on croira avoir atteint, par la répétition, une exactitude suffisante, on lira les verniers, et en divisant l'arc total par le nombre des observations, on aura l'arc simple. Ce procédé possède évidemment tous les avantages que nous avons remarqués dans la répétition pour les angles verticaux.

283. Voyons maintenant les précautions et les vérifications qu'il exige. La première est de rendre les axes optiques des deux lunettes parallèles au plan du limbe : rien n'est plus facile. On a vu comment il faut opérer pour la lunette supérieure ; quand celle-ci est réglée, on la dirige sur un objet éloigné, et on amène l'axe optique de l'autre sur le même point. Ces axes optiques sont alors parallèles entre eux ; ils sont donc tous deux parallèles au plan du limbe puisque l'un d'eux a été préalablement amené dans cette situation.

284. Nous avons tacitement supposé que la direction de ces axes passait par le centre de l'instrument ; cela ne saurait avoir lieu que par un hasard extraordinaire ; il y a même des cercles dont les lunettes sont excentriques. Cette excentricité doit produire un effet analogue à l'erreur de collimation dans le mural : examinons-en l'influence.

Supposons d'abord que l'axe optique de la lunette

Digitized by Google

supérieure passe toujours par le centre du limbe, en sorte que l'inférieure seule soit excentrique. Ce cas est celui qui se présente le plus fréquemment. Tout ce que nous avons à considérer, c'est l'étendue de l'arc $AA'A''$, parcouru par la lunette supérieure sur le limbe, *fig.* 69. Or cet arc est composé de deux parties, l'une $A'A''$ est toujours l'arc compris entre les deux objets; l'excentricité de la lunette inférieure n'y a aucune influence, puisqu'il est intercepté entre deux positions de la lunette supérieure, qui n'est point excentrique. L'autre portion AA' est la quantité dont la lunette supérieure, d'abord dirigée sur S', a été repoussée à droite par la rotation du limbe. L'arc AA' est donc égal à l'arc décrit par la lunette inférieure pour aller de l'un à l'autre objet : or, si cette lunette est excentrique, le recul peut fort bien n'être pas égal à $A''A'$. Car soit, *fig.* 71, CE l'excentricité, qui ne variera pas, puisque la distance de la lunette et de son axe optique au centre du limbe est constante. Dans la première observation, lorsque la lunette inférieure est dirigée sur l'objet à gauche, la direction de l'axe optique sera ES''. Dans la seconde position, lorsqu'elle passe sur l'objet à droite, la direction de l'axe optique deviendra $E'S'$. L'angle décrit par cet axe en passant de l'un à l'autre objet, est donc égal à $S''C'S'$ ou à l'angle au centre ECE', puisque l'excentricité CE, CE', est supposée perpendiculaire à la direction de l'axe optique. Cet angle ECE' ou $S'C'S''$ exprime donc aussi le recul de la lunette supérieure, qui a fait le même mouvement. Désignons par A l'angle cherché, c'est-à-dire $S''CS'$; et nommons S', S'' les angles en S' en S'', qui sont réellement les deux parallaxes (*) sous lesquelles un observateur

(*) On obtient aisément ces parallaxes quand on connaît l'excentricité du cercle et la distance de l'objet; car en nommant e l'exceu-

Digitized by Google

placé à l'un ou l'autre de ces points, verrait l'excentricité. Cela posé, on aura évidemment $S''C'S' = S''BS' - S'$, puisque l'angle $S''BS'$ est extérieur au triangle $BC'S'$. On aura de même $S''BS' = A + S''$, et, par conséquent, $S''C'S' = A + S'' - S'$: c'est-à-dire, que l'angle décrit par le recul de la lunette supérieure est égal à l'angle des deux objets, plus la différence des parallaxes. L'arc total décrit par cette lunette sur le limbe, dans son retour vers l'objet à gauche, est donc égal à l'angle précédent plus A, ou à $2A + S'' - S'$; et sa moitié $A + \frac{S'' - S'}{2}$, représente l'arc simple lu sur le limbe. La quantité $\frac{S'' - S'}{2}$ exprime donc ce qu'il faut retrancher de cet arc pour avoir l'angle A compris entre les deux objets ; ou ce qui revient au même, il faut à l'arc mesuré par les

---

tricité, G et D les distances ; S, S'' les deux angles en S' et en S'', on a évidemment

$$\sin S'' = \frac{e}{G} \qquad \sin S' = \frac{e}{D} ;$$

ou, en réduisant les sinus en secondes, à cause de la petitesse des angles S' et S'',

$$S'' = \frac{1''.e}{G.\sin 1''} ; \quad S' = \frac{1''.e}{D.\sin 1''} ,$$

et la correction à ajouter à l'angle observé devient

$$\frac{S' - S''}{2} = \frac{1''.e}{2D.\sin 1''} - \frac{1''.e}{2G.\sin 1''} .$$

Elle se trouve ainsi exprimée en secondes. Si les distances des deux objets sont égales, $D = G$, et la correction est nulle. Il est visible qu'il suffira, dans le calcul, de connaître D et G à-peu-près et même avec une très-grossière approximation.

Digitized by Google

verniers, ajouter la correction $\frac{S' - S''}{2}$; c'est-à-dire, moitié de la parallaxe de l'objet à droite, moins la mo de la parallaxe de l'objet à gauche. Nous avons supp l'excentricité à gauche de la lunette inférieure, l'obser teur étant placé à l'oculaire; ce serait le contraire, si (était à droite. Il faudrait alors ajouter la moitié de la par laxe de l'objet à gauche, moins la moitié de la parall de l'objet à droite. Il y a des cercles où les deux lunet sont excentriques, mais ce cas est fort rare: l'on p voir aisément qu'alors la correction définitive est la c férence de celles qu'exige chaque excentricité. Au res comme l'excentricité des lunettes et le limbe du cer lui-même sont toujours fort petits par rapport à la (tance des objets dont on mesure l'angle, il en résu que les parallaxes S' et S'' sont toujours extrêmem petites, et peuvent, le plus souvent, être négligées (

285. Il arrive souvent qu'ayant à observer d'un po C, *fig.* 72, un angle $S'CS''$, compris entre deux obj éloignés, on ne peut pas se placer précisément au cen

(*) Borda a remarqué que l'effet de l'excentricité est nul sur somme des trois angles d'un triangle; en effet, soient A, B, C, trois angles en allant de droite à gauche; AB, BC, AC, les t côtés, les corrections dues à l'excentricité seront

à l'angle A..... $\frac{1''.e}{2.AC.\sin 1''} - \frac{1''.e}{2.AB.\sin 1''}$,

à l'angle B..... $\frac{1''.e}{2.AB.\sin 1''} - \frac{1''.e}{2.BC.\sin 1''}$,

à l'angle C..... $\frac{1''.e}{2.BC.\sin 1''} - \frac{1''.e}{2.AC.\sin 1''}$;

dont la somme est égale à zéro.

C de la station, mais dans quelque autre point, tel que C', situé à une petite distance du premier. Alors, l'angle $S''C'S'$, observé de ce point, n'est pas le même que celui qu'on verrait du point C, et il faut y faire une petite correction pour l'y ramener; c'est ce que l'on nomme *la réduction au centre.*

Ceci est encore une affaire de parallaxe. Soit C l'angle demandé, C' l'angle observé, S' S'' les parallaxes des deux objets, c'est-à-dire, les angles sous lesquels ils voient la ligne CC' qui joint les deux centres. On aura, comme tout-à-l'heure, $C' = S''BS' - S'$, parce que l'angle $S''BS'$ est extérieur au triangle $C'BS'$. On aura, par une raison semblable, $S''BS' = C + S''$; par conséquent, $C' = C + S'' - S'$, et enfin $C = C' + S' - S''$, d'où l'on voit que pour avoir l'angle cherché C, il faut ajouter à l'angle observé la parallaxe de l'objet à droite, et en retrancher la parallaxe de l'objet à gauche. Ces parallaxes sont faciles à évaluer quand on connaît la distance des objets, la distance des centres et les angles observés du point C' (*).

(*) Soit toujours l'angle observé $S''C'S' = C'$; supposons que l'on observe aussi l'angle $S''C'C$, et nommons-le γ. Appelons G la distance CS'', de l'objet à gauche au centre de la station; et D la distance CS' de l'objet à droite; enfin nommons la distance des deux centres $CC' = \delta$,; les triangles $S'C'C$, $S''C'C$, donneront

$$\sin S' = \frac{\delta . \sin \{C' + \gamma\}}{D} \; ; \quad \sin S'' = \frac{\delta . \sin \gamma}{G} \; ;$$

d'où l'on tire, en substituant les arcs aux sinus,

$$S' - S'' = 1''. \frac{\delta . \sin \{C' + \gamma\}}{D \sin 1''} - \frac{1''. \delta . \sin \gamma}{G \sin 1''} \; ;$$

Digitized by Google

286. Quand on a observé les angles de position formés entre les objets et dans leur plan, il faut les réduire à l'horison. Pour cela, on redresse le limbe, on le remet vertical, et on mesure les distances des deux objets au zénith; avec ces distances et l'angle observé, on peut trouver la réduction à l'horison, comme nous l'avons enseigné dans la page 152.

287. Enfin, le cercle répétiteur peut encore servir, et sert en effet, à trouver l'arc de distance de deux astres, ou la distance angulaire d'un astre à un objet fixe. Le procédé est absolument le même que pour mesurer les angles de position des objets terrestres dans des plans inclinés. Seulement si l'un des objets, ou tous les deux sont mobiles, il faut que les observateurs fassent continuellement varier l'inclinaison du plan du limbe, de manière à lui faire suivre toujours les deux objets. Chaque fois que la lunette est pointée sur l'astre, on note exactement l'heure, la minute, la seconde et la fraction de seconde, comme dans les autres observations célestes. En bornant les séries à un petit nombre de minutes, on peut regarder la distance moyenne comme correspondante à l'époque moyenne des observations; car nous avons vu qu'à de grandes distances du méridien, le mouvement de

---

c'est la correction qu'il faut ajouter à l'angle observé : si le second terme l'emporte sur le premier, elle pourra devenir négative, et alors il faudra la retrancher. Ces deux termes étant ordinairement fort petits, il suffit de connaître G, D, et l'angle γ approximativement. Pour avoir l'angle γ, on mettra la lunette supérieure sur zéro, et on la dirigera sur S'', l'inférieure étant sur S'; alors celle-ci restant fixe, on détachera la première et on la dirigera à vue vers le centre C, puis on lira l'arc sur le limbe; ce sera la mesure de l'angle γ, suffisamment approchée.

Digitized by Google

l'astre est sensiblement uniforme dans un petit intervalle de tems.

288. Cette opération, qui exige beaucoup d'habileté et d'exactitude, sert à trouver les azimuths des objets terrestres, par exemple, ceux des signaux pour orienter une méridienne ou une carte. La distance du signal au zénith étant constante, peut être facilement observée : celle de l'astre peut se calculer d'après le tems de l'observation. Avec ces données et l'arc de distance, on forme un triangle sphérique où les trois côtés sont connus. On peut donc aisément trouver l'angle opposé à l'arc de distance ; c'est la différence des azimuths. On connaît d'ailleurs l'azimuth de l'astre, d'après le tems de l'observation, et d'après l'heure de son passage au méridien. On connaîtra donc l'azimuth absolu de l'objet. Il faut remarquer que, dans le calcul, on doit employer les distances apparentes au zénith, affectées de la réfraction, puisque l'arc observé est pris entre ces distances apparentes. Il est clair que l'azimuth absolu, et les différences d'azimuth restent les mêmes malgré le changement des hauteurs, puisque la réfraction élève les arcs dans les verticaux où ils se trouvent. On fait commodément ces observations sur le soleil. Généralement l'instant le plus favorable est celui où l'angle horaire de l'astre est égal à 100s, ce qui répond à six heures sexagésimales avant ou après le passage au méridien. Alors, en effet, l'astre est parvenu à son plus grand écart de ce plan. Il cesse de s'en éloigner pour y revenir ensuite en décrivant l'autre portion de son cercle diurne, ce qui fait que dans les observations voisines de cette époque, l'azimuth varie fort peu. D'un autre côté, il faut éviter d'observer trop près de l'horison, lorsque l'astre entre dans des couches où l'on peut craindre des réfractions extraordinaires. Car

Digitized by Google

alors sa distance au zénith, qu'il faut calculer d'après l'observation du tems pourrait être fort inexacte. On évite cet inconvénient en employant la polaire, au lieu du soleil. Alors il faut avoir un signal de feu qui puisse être apperçu la nuit afin de pouvoir observer sa distance angulaire à l'étoile. Pour cet objet rien n'est plus avantageux que les lampes à courant d'air munies de réflecteurs. On prend ensuite à loisir l'angle que ce signal forme avec l'objet terrestre dont on veut déterminer l'azimuth. L'instant le plus favorable pour l'observation de l'arc de distance, est celui où l'étoile se trouve dans la partie de son cercle qui est la moins éloignée du signal, parce qu'alors la distance étant la plus courte possible, éprouve de très-petites variations. La position la plus favorable pour placer le signal est à 100s du méridien de l'observateur, parce qu'alors l'époque des observations approche le plus possible du cercle de six heures. Cette méthode a été employée avec succès en Angleterre, et depuis par Mechain en Espagne.

Comme cette opération peut être fréquemment utile, nous allons développer le petit calcul qu'elle suppose. Nous ferons d'abord abstraction de la réfraction ; nous verrons ensuite comment on peut y avoir égard.

Soit, *fig.* 73, O l'observateur, Z le zénith, P le pôle, $S\,S'\,S''$ le parallèle que l'étoile décrit ; soit R le signal de feu dont on veut avoir l'azimuth, représenté par l'angle RZP. Pour cela, nous avons dit qu'il suffit de trouver la distance RP de l'astre au pôle : en effet, les arcs ZP, ZR, distances du pôle et du signal au zénith sont donnés par l'observation. Si de plus on parvient à mesurer l'arc RP, alors dans le triangle sphérique RPZ, on connaîtra les trois côtés ; on pourra donc aisément calculer l'angle RZP, ou l'azimuth du signal.

Pour trouver *RP*, il suffirait de connaître l'instant où l'astre passe au point *S*, dans le méridien du réverbère; car alors on mesurerait *RS* avec le cercle; on y ajouterait *SP*, distance polaire de l'étoile, et l'on aurait *RP*. Il n'est pas même indispensablement nécessaire de connaître l'instant du passage en *S* avec la dernière précision; car l'arc *RS* étant perpendiculaire en *S* à l'arc que l'étoile décrit, les variations de sa longueur, de part et d'autre de ce point, sont nécessairement fort petites. Or, l'époque approchée du passage peut se trouver de bien des manières. Par exemple, comme on est supposé connaître l'heure, on sait à quel instant l'étoile passe au méridien de l'observateur : à cet instant, mettez le limbe du cercle vertical, dirigez la lunette sur l'étoile, et lisez sur le cercle azimuthal le point de la division auquel répond l'index : puis donnant au cercle un mouvement azimuthal, amenez le limbe dans le vertical du signal; placez celui-ci au centre des fils, et lisez de nouveau, sur le cercle azimuthal, le point où répond l'index. L'arc parcouru sur le cercle sera évidemment l'azimuth du signal, ou l'angle *RZP*. Alors, dans le triangle sphérique *RPZ*, vous connaîtrez deux côtés *RZ*, *PZ*, et l'angle compris; vous pourrez donc calculer le troisième côté *RP*, distance du réverbère au pôle, et l'angle *RPZ*, qui sera l'angle horaire de l'astre à l'instant de son passage au point *S*. Mais vous n'aurez ainsi ces quantités que d'une manière approchée, et avec le degré d'approximation que comporte la division de votre cercle azimuthal.

Vous pourriez même rectifier ces premières données, en amenant le limbe dans le plan du signal et de l'étoile, un peu avant l'époque où, suivant votre premier calcul, elle doit passer par le point *S*. Alors, dirigez une des lunettes sur le signal, l'autre sur l'étoile, et suivez celle-

Digitized by Google

ci pendant quelque tems, précisément co
vouliez mesurer la distance RS; vous ne
reconnaître l'instant où cette distance est l
et vous connaîtrez ainsi l'époque du passa
avec assez de précision.

Mais voulez-vous en obtenir encore davan
à une exactitude indéfinie? Appliquez ici l
la répétition des angles, précisément comm
les passages au méridien. Observez au cercl
RS', RS, RS'', quelque tems avant et apr
passage au point S, et réduisez-les toutes,
à ce qu'elles seraient si elles avaient été o
cisément dans ce même point. Cette réduc
facile; car les circonstances sont ici absolum
que dans les passages d'étoiles au méridien
plus courte distance RS représente la distanc
qui est la plus petite de toutes. Les au
RS', RS'', représentent les distances zénith
très-près de la première, et dont l'écart e
les angles horaires SPS', SPS''. Ainsi, les m
qui ont servi pour la réduction des distances
serviront encore pour les azimuths (*).

(*) Nommons R la distance du signal au pôle, Δ
laire de l'étoile, et p l'angle horaire compté à pa
du passage de l'étoile en S, dans le méridien du sig
données, on aura la plus courte distance $RS = R -$
rection δ qu'il faut faire aux distances observées hors
aura pour valeur

$$\delta = \frac{\sin R \sin \Delta}{\sin \left\{R - \Delta\right\}} \cdot \frac{2''.\sin^2 \frac{1}{2} p}{\sin 1''}.$$

Les valeurs du facteur variable $\frac{2''.\sin^2 \frac{1}{2} p}{\sin 1''}$ seront

Digitized by Google

Examinons maintenant les modifications que la réfraction introduit dans ces résultats. Sans elle, les positions successives de l'étoile $SS'S''$ formeraient un arc de cercle dont le pôle vrai serait le centre. L'effet de la réfraction élève l'étoile d'une quantité dépendante de sa hauteur sur l'horison, et qui, par conséquent, varie à chaque instant, à mesure que la hauteur de l'étoile varie. L'orbite apparent $SS'S''$ n'est donc plus circulaire; mais comme l'élévation produite par la réfraction est fort petite, la forme de l'orbite est aussi très-peu altérée. Si l'on n'en considère qu'une portion très-peu étendue, comme cela a lieu dans nos observations de distance, l'effet de la réfraction étant à-peu-

---

même table qui sert pour la réduction des distances méridiennes; on fera la somme de toutes ces valeurs pour les instans des observations, on la multipliera par le facteur constant $\frac{\sin R . \sin \Delta}{\sin (R - \Delta)}$, et en divisant le produit par le nombre des arcs observés, on aura la correction δ, qu'il faut toujours ajouter à la distance moyenne mesurée sur le limbe. On aura donc ainsi RS, et par suite, $RS + \Delta = R$, c'est-à-dire, la distance du signal au pôle.

On voit qu'ici, comme pour les distances méridiennes, il suffit de connaître R approximativement : cependant, si la valeur de cette quantité, déduite des observations après les réductions précédentes, différait beaucoup de celle que l'on a employée dans le calcul des réductions, on se servirait de la nouvelle valeur R pour calculer plus exactement la valeur de l'angle horaire SPZ, qui donne l'instant du passage de l'étoile au méridien du signal. En effet, en supposant R connu, les trois côtés du triangle sphérique RPZ le sont pareillement; et l'on peut calculer un quelconque des angles du triangle. Connaissant ainsi plus exactement la distance R et l'époque du passage de l'étoile en S, on recommencera le calcul des réductions δ avec les élémens corrigés. Cette fois, la valeur que l'on obtiendra pour $RS + \Delta$ ou R, sera fort exacte, et pourra être regardée comme définitive.

Digitized by Google

près constant dans cet intervalle, ne fait qu'élever cette portion de l'orbite sans la déformer sensiblement, et le petit arc sur lequel on opère peut encore être considéré comme circulaire : mais le centre de cet arc n'est plus le pôle vrai, comme dans le cas où l'on supposait la réfraction nulle ; c'est le pôle vrai, élevé par la réfraction autant que l'étoile l'est réellement. Ainsi, pour avoir égard à l'effet de la réfraction dans les observations d'azimuth, il suffit de substituer ce pôle fictif au pôle vrai dans les formules, qui d'ailleurs restent les mêmes qu'auparavant (*).

(*) Pour mettre ceci en évidence, considérons d'abord une position quelconque S' de l'étoile sur son cercle, abstraction faite de la réfraction. Soit alors Z la distance vraie de l'astre au zénith ; D la distance du zénith au pôle vrai ; Δ la distance polaire vraie de l'étoile, et A l'azimuth du vertical dans lequel elle se trouve, azimuth représenté par l'angle PZS', *fig.* 74 ; on aura évidemment, dans le triangle sphérique PZS',

$$\cos \Delta = \sin D \sin Z \cos A + \cos D \cos Z ;$$

ou, ce qui revient au même,

$$\cos \Delta = \cos \left\{ Z - D \right\} - 2 \sin D \sin Z \,.\, \sin^2 \tfrac{1}{2} A.$$

Supposons que, par l'effet de la réfraction, la distance zénithale Z de l'étoile devienne $Z' = Z - r$; la réfraction r variera si peu dans l'étendue de l'arc observé, qu'on pourra la regarder comme constante, car son changement total, dans tout le cercle décrit par l'étoile, depuis le passage inférieur au méridien, jusqu'au passage supérieur, va rarement à 10″. Élevons le pôle de la même quantité, en sorte que sa distance au zénith devienne $D' = D - r$, et rapportons les positions apparentes de l'étoile à ce point considéré comme fixe. En nommant Δ' sa distance apparente à l'étoile, nous aurons pareillement

$$\cos \Delta' = \cos \left\{ Z' - D' \right\} - 2 \sin D' \sin Z' \sin^2 \tfrac{1}{2} A ;$$

Maintenant, la nature du mouvement vrai de l'étoile est tel que

A défaut de cercle répétiteur, les observations d'azimuth peuvent se faire avec beaucoup de promptitude et même avec une précision presque toujours suffisante, par le moyen du sextant de réflexion, instrument qui est entre

---

Δ reste constante ; il s'agit de faire voir que, pendant un court intervalle de tems, Δ' peut être regardée comme constante aussi. Pour cela, je retranche les deux valeurs de $\cos\Delta$ et $\cos\Delta'$ l'une de l'autre, en observant que, par nos suppositions, $Z'-D'=Z-D$, et l'on a ainsi

$$\cos\Delta' - \cos\Delta = 2.\left\{\sin D \sin Z - \sin D' \sin Z'\right\} \sin^2 \tfrac{1}{2} A,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$\cos\Delta' - \cos\Delta = 2.\left\{(\sin Z - \sin Z')\sin D + (\sin D - \sin D')\sin Z'\right\}\sin^2\tfrac{1}{2}A:$$

au lieu des différences de sinus et de cosinus, mettons leurs valeurs en fonctions de la différence des arcs, il viendra

$$\sin\tfrac{1}{2}\left\{\Delta+\Delta'\right\}\sin\tfrac{1}{2}\left\{\Delta-\Delta'\right\} =$$
$$= 2\sin\tfrac{1}{2}r\left\{\cos\tfrac{1}{2}\left\{Z+Z'\right\}\sin D + \cos\tfrac{1}{2}\left\{D+D'\right\}\sin Z'\right\}\sin^2\tfrac{1}{2}A.$$

Tous les termes du second membre se trouvant multipliés par $\sin\frac{1}{2}r$ sont très-petits de l'ordre de la réfraction. La différence $\Delta-\Delta'$, des deux distances, est donc aussi très-petite du même ordre. En se bornant à sa première puissance, on peut substituer le rapport des petits arcs $\frac{1}{2}(\Delta-\Delta')$ et $\frac{1}{2}r$ à celui de leurs sinus; on peut, de plus, supposer $\Delta=\Delta'$, $Z=Z'$, $D=D'$, dans tous les autres termes de l'équation; on aura alors

$$\Delta - \Delta' = 2r\,\frac{\sin\left\{D+Z\right\}}{\sin\Delta}\sin^2\tfrac{1}{2}A:$$

si la différence $\Delta-\Delta'$ restait constante, comme Δ ne varie point, Δ' serait constante aussi; examinons donc, d'après cette formule, à quoi s'étend la variabilité de $\Delta-\Delta'$.

Or, on voit tout de suite que cette variation ne peut être que fort petite, et même tout-à-fait négligeable, quand l'arc qui com-

Digitized by Google

les mains de tous les marins, et qui doit être entre les mains de tous les voyageurs. On verra plus loin le détail de cette application, quand nous traiterons des instrumens qui servent aux observations nautiques.

---

prend les observations est très-petit. Car l'expression de $\Delta - \Delta'$ ayant pour facteur $\sin^2 \frac{1}{2} A$, et l'azimuth A dans lequel on peut observer la polaire, étant toujours fort petit, du moins dans nos climats, la valeur de $\Delta - \Delta'$ est toujours extrêmement petite. A Paris, par exemple, elle ne s'éleverait tout au plus qu'à deux secondes, en supposant la réfraction d'une minute, et l'angle horaire de six heures, ce qui donne la plus grande valeur de l'azimuth A. On peut donc, sans aucune erreur, négliger les variations de Δ' pendant l'intervalle des observations, et employer, pour A et Z, les valeurs qui conviennent à l'époque moyenne de la série; d'autant mieux que si le signal est placé dans un azimuth peu différent de 100°, l'azimuth A de l'étoile varie très-peu pendant la durée des observations. Ainsi, avec ces restrictions, la valeur de $\Delta - \Delta'$ pourra être employée comme constante; l'étoile sera censée décrire encore un petit arc de cercle autour du pôle fictif, et le rayon de ce cercle sera

$$\Delta' = \Delta - \frac{2r.\sin\left\{Z + D\right\}}{\sin \Delta} \sin^2 \tfrac{1}{2} A.$$

La diminution de ce rayon est l'effet du rapprochement des verticaux qui tous concourent au zénith. Car l'orbite de l'étoile étant toujours comprise entre les mêmes verticaux extrêmes, il faut nécessairement, si elle s'élève, que son rayon diminue; et diminue d'une quantité dépendante de l'azimuth A, qui mesure l'écart de ces verticaux. On voit aussi que ces formules, fondées sur la petitesse de l'angle A, cesseraient d'être exactes si le pôle vrai était assez élevé sur l'horison pour que l'azimuth A cessât d'être un très-petit angle; mais cela ne saurait arriver que dans des contrées trop voisines du pôle pour que l'on puisse jamais avoir occasion d'y observer.

En résumant ce qui précède, on voit que, pour avoir égard à l'effet de la réfraction dans les observations d'azimuth, il suffit de rapporter tous les calculs au pôle fictif, dont la distance au zénith

289. Quoique le cercle répétiteur jouisse de tous les avantages que nous venons de lui reconnaître, je ne dois pas cependant dissimuler que quelques défauts d'exécution de la part de l'artiste pourraient détruire toute son exactitude, et cela est d'autant plus important à considérer, que les défauts dont il s'agit sont très-aisés à reconnaître; qu'il est très-facile, lorsqu'on en est prévenu, d'éluder leur influence; et qu'enfin, faute de ces précautions, on s'expose à des erreurs graves, dont rien ne peut vous avertir.

D'après ce que nous avons dit au commencement de ce chapitre, sur la construction du cercle répétiteur, il est évident que les seuls défauts qu'on ait à y redouter sont ceux qui peuvent attaquer le principe de la répétition, en produisant sur chaque observation une erreur constante. En effet, une pareille erreur s'accumulant

---

est $D' = D - r$, r étant la réfraction à la hauteur moyenne où l'on observe l'étoile; en conséquence il faut employer, pour distance polaire de l'étoile, la valeur de Δ', que nous venons de calculer.

Avec ces valeurs, on déterminera l'instant approché du passage de l'étoile au méridien *apparent* du signal, d'après les méthodes d'essais que nous avons indiquées; ensuite, on observera, par la répétition, les distances apparentes RS du signal à l'étoile. On calculera les réductions s, en employant les valeurs apparentes R', Δ' et D', ce qui donne

$$s' = \frac{\sin R' . \sin \Delta'}{\sin \left\{R' - \Delta'\right\}} \cdot \frac{2'' \sin^2 \frac{1}{2} p'}{\sin 1''}.$$

Les angles horaires p' doivent être comptés depuis le passage de l'étoile au méridien apparent du signal, relativement au pôle fictif. La distance réduite RS étant ainsi trouvée, on aura $R' = RS + \Delta'$; ce sera la distance du signal au pôle fictif : enfin, avec les valeurs apparentes R', D', et la distance RS du signal au zénith, on calculera l'azimuth du signal $P'ZR$ qui sera l'azimuth véritable.

Digitized by Google

avec le nombre des observations, et n'étant pas susceptible de compensation, puisque nous supposons toujours à l'instrument une forme invariable, se retrouverait nécessairement toute entière dans la distance moyenne au zénith, qui, sous ce rapport, ne serait pas plus exacte qu'une observation unique.

290. De ce genre sont les erreurs dues à l'inclinaison de l'axe optique et au défaut de verticalité du plan du limbe. Nous avons donné les moyens de les mesurer et de les détruire, ou de les atténuer assez pour que leur influence devienne absolument insensible. Mais il y a encore dans les cercles d'autres causes possibles d'erreurs pareillement constantes, auxquelles on n'a pas pris garde jusqu'à présent. La première est l'erreur du centrage. Elle a lieu si la lunette supérieure, en tournant autour du centre du limbe, peut jouer autour de l'axe qui la porte. Pour concevoir l'erreur qui en résulterait sur les distances au zénith, partons de la première position de la lunette au commencement des observations, laquelle est représentée par $OC'A$, *fig.* 75. Alors l'anneau MN, percé au centre de l'alidade qui porte la lunette, est descendu par son poids sur l'axe CM, autour duquel la lunette tourne; et l'anneau touche l'axe en M, à son point le plus élevé. Les choses restent ainsi dans la seconde position de la lunette après le retournement du cercle, pour passer à l'observation paire, *fig.* 76 et 77. Seulement le point de contact de l'anneau est passé de M en N, sur la partie opposée de sa circonférence. Par conséquent l'arc AZA' parcouru par l'alidade sur le limbe, *fig.* 77, est plus grand que l'angle véritable aCa', et la différence est égale à $Aa + Aa'$ ou $2Aa$. Mais une erreur contraire, et plus considérable, a lieu dans le passage de la seconde observation à la troisième. En effet, à la fin de la seconde, la lunette a la position $OC'A'$, *fig.* 77. Dans

Digitized by Google

le retournement du cercle, la lunette prend la direction $OC'A'$, *fig.* 78. Elle conserve la même inclinaison sur l'horison ; le point de contact N reste le même, et le point A' aussi. Mais quand ensuite on fait tourner le limbe verticalement autour de son centre C, pour ramener la lunette vers l'astre, et lui donner la direction $OC'A'$, de la *fig.* 79, le point de contact de l'anneau, sur l'axe central, ne se fait plus au même point N. La lunette tombant par son poids, le contact revient de nouveau du côté de M, dans la partie opposée de sa circonférence. Ce mouvement rapproche le point $A_{,}'$ du point A, parce que l'oculaire désigné par O dans la figure, est fixé au moyen de sa vis de pression. La lunette tourne donc ainsi autour du point O comme centre ; l'objectif en tombant, rétrograde sur le limbe d'une quantité $A'A_{,}'$, quadruple de $A'a'$; et comme l'arc double conclu du premier couple d'observations était trop grand de $2Aa$, l'arc quadruple conclu des deux couples consécutifs est trop petit de la même quantité. Il est clair que ce même effet se reproduira toujours sur chaque couple ; et que, pour des distances égales au zénith, il se fera toujours dans le même sens, de la même quantité, puisque l'anneau de l'alidade et l'axe central sont tous deux circulaires. Voilà donc une cause qui tendra toujours à diminuer la mesure des distances au zénith. Elle est d'autant plus à redouter, que le rayon de l'anneau et celui de l'axe sont ordinairement fort petits, de sorte que le moindre jeu qui peut se trouver entre eux s'agrandit considérablement en se reportant sur le limbe. Il est donc de la dernière importance que la juxtaposition de ces deux pièces soit observée avec un soin extrême ; et pour cela il faut que l'axe d'acier qui porte l'alidade soit prolongé d'une quantité suffisante pour que l'artiste puisse l'adapter exactement sur l'anneau. Malheureusement, il

Digitized by Google

paraît qu'on n'y a pas donné jusqu'ici assez d'attention, si ce n'est dans les derniers cercles que l'on a construits.

291. Un autre effet absolument semblable se produira si la vis de pression destinée à fixer l'alidade par la pression sur le limbe, n'a pas assez de serrage pour la retenir invariablement. Car, dans le passage de la seconde observation à la troisième, ou en général d'une paire à une impaire, la lunette pourra glisser par son poids, en vertu du mouvement que l'on donne au limbe; et alors le point A' se déplacera encore dans un sens ou dans l'autre, de manière à diminuer ou à augmenter les distances au zénith. Ce déplacement n'influera que dans le passage des observations impaires aux observations paires, où la fixité de la lunette sur le limbe est de rigueur.

292. Enfin, un effet du même genre se produira encore, si la vis de rappel qui fait mouvoir la lunette sur le limbe, a le moindre jeu dans son écrou ou dans ses collets. Car, sans entrer ici dans des détails de construction trop minutieux, on peut considérer cette vis comme destinée aussi à retenir la lunette fixe dans le passage des observations paires ou impaires. Si la vis ballotte dans son écrou, la lunette qu'elle conduit pourra prendre absolument les mêmes mouvemens. Or, la lunette se renversant nécessairement dans le passage des observations paires aux impaires, la vis de rappel, qui fait corps avec elle, prend aussi des positions opposées, comme on le voit dans les fig. 77 et 79, où cette vis est désignée par V. Par conséquent, si elle a du jeu dans l'écrou qui la retient, il y aura une de ces deux positions où la lunette ne sera plus soutenue. Ainsi elle tournera dans le sens où la pesanteur l'entraîne, c'est-à-dire, que le point A' descendra si le bout qui porte l'objectif est plus lourd que celui qui porte l'oculaire; dans le cas

Digitized by Google

contraire, il s'élevera : dans le premier cas, la distance au zénith, donnée par le premier couple, sera diminuée, dans le second cas, elle sera augmentée.

293. En vain voudrait-on prévenir ces erreurs en lisant avec soin les verniers dans les deux positions opposées de la lunette ; il faudrait qu'elles fussent énormes pour qu'on pût ainsi les appercevoir. Heureusement on peut les corriger toutes par un moyen très-simple. C'est d'observer des distances zénithales d'étoiles au nord et au sud du zénith. Car si le cercle nous donne des distances trop grandes ou trop petites, la somme de ces distances sera aussi trop grande ou trop petite d'une quantité double. Or cette somme n'est autre chose que la différence des distances polaires des étoiles observées ; ainsi, en prenant ces différences dans des catalogues d'étoiles bien exacts, on verrait si le cercle a une erreur quelconque, et dans quel sens elle se trouve. Malheureusement, on ne connaît encore parfaitement que les distances polaires des étoiles dont on peut observer les deux passages. Il y a beaucoup d'incertitude sur les autres, et ce serait un travail des plus utiles que de déterminer exactement la déclinaison des plus brillantes, au moyen de leurs hauteurs méridiennes, observées au cercle répétiteur dans un lieu tel que Paris, dont la latitude est exactement déterminée par une multitude de passages d'étoiles circompolaires. Toutefois, sans attendre l'exécution d'un pareil travail, on peut encore suppléer à la connaissance des distances polaires, quand on n'a pas besoin d'une latitude absolue, mais seulement de la différence de latitude aux deux extrémités de l'arc observé, comme cela arrive ordinairement dans les observations géodésiques, qui sont celles où l'on exige le plus de rigueur. Il suffit alors de répéter, à ces deux extrémités, les observations de distances zénithales

Digitized by Google

des mêmes étoiles au nord et au sud du zénith. On fera pour chaque station la somme de ces distances opposées, afin d'avoir les mesures des mêmes arcs célestes. Si l'on y trouve une différence on en prendra la moitié, et on l'ajoutera aux distances observées dans la station où la somme des distances a été la plus petite. Par ce moyen, on réduira le cercle à n'avoir que la même erreur dans les deux stations, et la différence des latitudes sera exacte. Mais la latitude absolue pourra être en erreur de toute la quantité correspondante à l'erreur absolue du cercle (*).

294. Il me paraît évident que les causes d'erreur dont je viens de parler ont produit les petits écarts que l'on remarque quelquefois, entre les latitudes absolues observées au même point, avec différens cercles, ou par

---

(*) Soit N la distance zénithale vraie d'une étoile située au nord du zénith, dans la station la plus boréale. Soit S la distance zénithale vraie d'une étoile située au sud, et observée de la même station. Nommons N', S' les quantités analogues pour la station la plus australe. Ce seraient là les quantités que l'on observerait, si le cercle n'avait aucune erreur. Alors la différence des latitudes serait $N'-N$ ou $S-S'$; et l'arc céleste $A=N+S$; $A'=N'+S'$ serait le même dans les deux stations, de sorte que l'on trouverait $A=A'$. Il n'en sera plus de même si le cercle a eu l'erreur constante e dans la première station, et l'erreur e' dans la seconde. Car alors les distances zénithales observées seront $N+e$; $S+e$; $N'+e'$; $S'+e'$, et quand on les combinera pour trouver la différence des latitudes, on aura, par les étoiles boréales, $N'-N+e'-e$; par les étoiles australes $S-S'+e-e'$. Les erreurs affectent ces résultats en sens contraire, ainsi elles disparaîtront en les ajoutant; et leur demi-somme $\frac{N'-N+S-S'}{2}$ donnera la véritable différence des latitudes indépendamment des erreurs constantes de chaque station.

Mais veut-on évaluer la différence de ces erreurs, c'est-à-dire la

Digitized by Google

différens observateurs, dont les résultats particuliers s'accordent entre eux. Les observations correspondantes au nord et au sud, auraient corrigé l'effet de ces différences, si l'on y eût songé plutôt; il semble désormais indispensable de les employer dans des observations où l'on veut atteindre la dernière exactitude.

295. Pour compléter ce chapitre, je crois utile d'expliquer avec exactitude, la théorie des niveaux à bulle d'air, instrumens dont l'application est extrêmement fréquente dans l'astronomie et dans la physique, mais sur lesquels on n'a pas généralement des idées très-précises. On appelle communément niveau à bulle d'air, un tube de verre fermé par les deux bouts, et rempli en partie d'un liquide, tel que l'eau, l'alcool ou l'éther. L'espace qui n'est point rempli par la liqueur, est occupé par l'air, ou au moins par la vapeur du liquide; et comme celui-ci, en vertu de la pesanteur, tend toujours à occuper la

---

quantité dont l'erreur constante du cercle a changé, en le transportant d'une station à l'autre. Rien n'est plus facile; car en faisant dans chaque station la somme des distances zénithales pour obtenir l'arc céleste, on aura

dans la première $A = N + S + 2e$,

dans la seconde $A' = N' + S' + 2e'$;

et comme $N' - N$ est égal à $S - S'$, si l'on retranche ces deux équations l'une de l'autre, on trouvera

$$A - A' = 2e - 2e', \quad \text{par conséquent} \quad e - e' = \frac{A - A'}{2},$$

c'est la différence des erreurs. Ajoutez-la aux distances zénithales $N' + e'$; $S' + e'$ observées dans la seconde station, elles deviendront $N' + e$; $S' + e$. Elles seront donc alors comparables aux distances observées dans la première, et en les combinant, on aura $N' - N$ ou $S - S'$ pour la vraie différence des latitudes.

Digitized by Google

partie la plus basse du tube et à s'y mettre de niveau, il en résulte que la bulle d'air se déplace aussi et se porte au plus haut point du tube. Ses mouvemens indiquent, par conséquent, les variations de l'inclinaison du plan sur lequel on a posé le niveau.

296. Examinons d'abord le cas où la bulle d'air serait assez petite pour pouvoir être considérée comme un point. Si l'intérieur du tube était parfaitement cylindrique, il n'y aurait, rigoureusement parlant, qu'une seule position du niveau où la bulle pût se trouver immobile au milieu du tube; ce serait la position horisontale; et la plus petite inclinaison la déplacerait indéfiniment, de manière qu'elle se porterait toute entière aux extrémités. Il faut donc, pour prévenir cet inconvénient, que l'intérieur du tube soit légèrement arqué. Alors la bulle se place de manière que son milieu réponde au point où la tangente à la courbure intérieure du tube est horisontale. Si l'inclinaison change, la bulle se déplace et se porte au point du tube qui est devenu le plus élevé, c'est-à-dire, où la tangente est devenue parallèle à l'horison.

Parmi toutes les courbures que l'on peut donner au tube, la plus avantageuse est celle du cercle, parce qu'alors les déplacemens de la bulle mesurent immédiatement sur le tube les variations de l'inclinaison. En effet, soit, *fig.* 80, *NS* un arc de cercle indéfini qui représente la section longitudinale du niveau. Soit *C* le centre de cet arc, et *CA* un rayon dirigé suivant la verticale. Dans cette position du niveau, la bulle d'air, que nous supposons toujours extrêmement petite, ira se placer au point *A*. Mais si l'inclinaison vient à changer, le rayon *CA* s'inclinera comme dans la *fig.* 81, et un autre rayon, tel que *CA'*, deviendra vertical; en même

Digitized by Google

tems la bulle se déplacera et se portera au point A'. L'arc AA', qu'elle décrit sur le niveau, est la mesure de l'angle ACA', ou du changement d'inclinaison.

297. Dans tout ceci, nous supposons que le niveau soit une ligne physique circulaire. Cela n'est point possible dans la pratique ; mais pourtant on peut y conserver les avantages de la circularité, en concevant la surface intérieure du niveau, comme un anneau engendré par un cercle DD', *fig.* 81, dont le centre se meut sur la circonférence directrice NS. Une pareille surface conserve évidemment toutes les propriétés de symétrie que nous venons de considérer. Quant à la manière de donner cette courbure aux tubes, on y parvient, à force d'essais, en usant leur surface intérieure par le frottement, au moyen de verges métalliques qu'on y introduit successivement par les deux bouts, jusqu'à ce que la marche de la bulle s'accorde exactement avec les changemens d'inclinaison. Pour voir si cette condition est remplie, on pose le niveau sur un plan incliné, d'une longueur déterminée, dont l'inclinaison peut être rendue variable au moyen d'une vis verticale dont la hauteur des pas est connue. La tête de cette vis porte un cadran divisé en parties égales, et un index comme une vis de micromètre. En faisant tourner la vis d'une quantité connue, il est facile, d'après les données précédentes, de calculer les variations qui en résultent, sur l'inclinaison du plan, et l'on voit si la marche de la bulle sur le tube y est exactement conforme. Pour cela, on commence par tracer sur le tube de verre des divisions égales dans toute sa longueur (*).

(*) L'exposition pratique de ces procédés se trouve dans un très-bon Mémoire de M. de Chezy, sur la construction des niveaux, inséré dans les Mémoires de l'Académie des sciences, Savans étrangers.

Digitized by Google

298. Par exemple, en soumettant à cette épreuve un niveau construit par Fortin, pour les observations de latitude à Dunkerque, nous avons trouvé que la bulle parcourt 3 millimètres sur le tube pour un changement de 1″ sexagésimale dans l'inclinaison, et elle conserve cette marche dans toute l'étendue des divisions avec une régularité parfaite. Ce résultat peut se vérifier encore d'une manière plus exacte, quand le niveau est adapté au cercle répétiteur, au moyen des observations d'un objet éloigné. Pour cela, mettez le limbe vertical, et dirigez un des pieds du cercle dans l'azimuth de l'objet; mettez la lunette supérieure sur zéro, et faites tourner le limbe jusqu'à ce que l'objet vienne au centre des fils; alors placez le grand niveau de manière que la bulle soit très-voisine d'une de ses extrémités. Cela fait, sans toucher à la lunette, faites tourner ensemble le niveau et le limbe dans leur plan vertical, au moyen des vis de rappel, jusqu'à ce que la bulle passe à l'autre extrémité du limbe, en sorte qu'elle parcoure ainsi un grand nombre de divisions; alors l'objet ne répondra plus au centre des fils, et il faudra faire marcher la lunette sur le limbe pour l'y replacer. L'arc qui mesure ce déplacement étant lu sur le limbe, on connaîtra le changement d'inclinaison qui répond au nombre de divisions que la bulle a parcourues; et par conséquent, en divisant cette inclinaison par leur nombre, on aura la valeur d'une d'entre elles.

L'arc parcouru dans une observation de ce genre étant toujours fort petit, une seule observation ne le donnerait pas avec assez d'exactitude, à cause des erreurs que l'on peut commettre dans les lectures des verniers; mais on peut appliquer ici le principe de la répétition. En effet, la première observation étant faite, et la lunette ramenée sur l'objet, déplacez le grand niveau et ramenez

Digitized by Google

la bulle à l'autre extrémité du tube ; puis, sans toucher à la lunette, faites tourner le limbe verticalement, jusqu'à ce que la bulle revienne à l'extrémité opposée. Ce mouvement déplacera l'objet, mais vous le ramenez au centre des fils en faisant mouvoir la lunette ; par ce moyen, celle-ci décrira un nouvel arc, qui s'ajoutera au premier qu'elle avait parcouru. Vous vous retrouvez ici précisément dans les mêmes circonstances que lors de la première observation, et vous repassez par les mêmes opérations. Rien n'empêche de faire ainsi une troisième observation, une quatrième, et d'avoir sur le limbe un arc assez grand pour que les erreurs des lectures extrêmes n'en fassent qu'une partie aliquote fort petite : cet arc correspondant à 1000 ou 1200 parties du niveau, donnera, par la division, la valeur d'une d'entre elles avec une extrême précision. Cette épreuve est d'autant plus nécessaire, qu'elle indique la valeur des parties du niveau lorsqu'il est en place. En effet, il peut arriver que cette valeur ne soit pas la même que quand le tube était libre et simplement posé à nu sur un plan. Car les montures dans lesquelles le niveau est ordinairement serré, peuvent l'infléchir et changer sa courbure, surtout si elle est d'un rayon considérable, comme dans notre niveau de Dunkerque, dont le rayon était de 619 mètres (*).

299. Dans tout ce qui précède, nous avons supposé

(*) Cela se voit d'après la marche du niveau. Sur celui-ci, un arc de 1″ sexagésimale est exprimé par 3 millimètres ; or, on sait par les calculs trigonométriques que le rayon exprimé en arc, vaut 57°,17′,44″,8 de la division sexagésimale, ou ce qui revient au même 206264″,8. Puisque chaque seconde vaut trois millimètres, le rayon vaudra 3 millimètres multipliés par 206264,8 ou 618^{m},7944.

Digitized by Google

la bulle d'air assez petite pour pouvoir être regardée comme un point. Cette considération était utile pour simplifier les raisonnemens ; mais on l'évite dans la pratique, et c'est avec raison ; car l'expérience apprend qu'une bulle si petite se meut avec une extrême lenteur, et que le moindre obstacle, la plus petite irrégularité du tube suffit pour l'arrêter : au contraire, on fait la bulle très-longue, parce que l'on a observé que plus elle est longue, plus elle est sensible, c'est-à-dire, plus elle revient promptement à l'équilibre.

Ce phénomène dépend des attractions réciproques du liquide et du verre : il est du genre de ceux que l'on nomme phénomènes capillaires, parce qu'ils ont été d'abord observés dans des tubes très-étroits, où l'on sait que les liquides susceptibles de mouiller le verre s'élèvent au-dessus de leur niveau naturel, en formant une petite colonne terminée par une surface concave. Les bords de cette surface, composés de molécules adhérentes au tube, s'élèvent le long de ses parois ; et leur inclinaison dépend de l'action plus ou moins grande du tube sur le fluide, et aussi de la fluidité plus ou moins parfaite. Un effet analogue se produit dans les niveaux, sur les extrémités de la bulle qu'ils comprennent. Ces extrémités sont relevées le long du tube ; par ce moyen la forme de la bulle d'air est arrondie dans les endroits où la surface du liquide touche le verre : elle l'est surtout aux deux bouts plus que sur les côtés, et elle l'est plus dans un tube étroit que dans un tube large. Cela tient à la nature des forces capillaires, qui, partant de la surface et n'ayant d'action sensible qu'à une très-petite distance, ont un effet d'autant plus intense que les surfaces qui les exercent sont plus rapprochées. C'est pour cela que l'élévation des liquides dans les tubes étroits et

verticaux, augmente à mesure que leur diamètre intérieur diminue, de manière que la colonne liquide ainsi soulevée est réciproque à ce diamètre, comme l'expérience et le calcul s'accordent également à le prouver. D'après cela, on conçoit que l'effet de ces forces doit sur-tout être considérable sur une très-petite bulle, autour de laquelle le fluide formerait une surface concave d'un très-petit rayon. Alors la moindre aspérité du tube peut changer considérablement les attractions qui déterminent cette forme, et alonger la bulle dans un sens plus que dans un autre, ou même la retenir absolument; au lieu que ces effets seront beaucoup moindres sur une longue bulle et dans un tube large, où le relèvement du fluide, par l'effet de la capillarité, sera beaucoup moindre. Tels sont les avantages des grands niveaux, pareils à ceux que Fortin a construits pour nos cercles. Mais pour que cette longueur soit utile, il faut que les tubes soient bien travaillés dans l'intérieur, et exactement calibrés, suivant la courbure circulaire; précautions que les artistes ne prennent pas ordinairement, se contentant d'y suppléer au moyen des courbures naturelles que les tubes de verre prennent toujours quand on les fabrique.

300. La bulle du niveau ayant une dimension sensible, on regarde son milieu comme le point le plus élevé du tube, et c'est la marche de ce milieu qui détermine les changemens d'inclinaison. Pour indiquer et mesurer ces changemens, on divise le tube dans toute sa longueur: le zéro de la division répond à son milieu, et pour déterminer la position du centre de la bulle, on prend la demi-somme des divisions où se terminent ses deux extrémités. Cela est rigoureux en effet si le tube est bien calibré suivant la forme annulaire, car alors, sa forme étant symétrique dans toutes ses parties, celle de la bulle le sera nécessairement. On pourrait même, si l'on voulait, prendre

Digitized by Google

une des extrémités de la bulle pour l'indice de son mouvement, mais l'autre moyen est plus avantageux parce qu'il atténue les petites irrégularités du tube en les partageant sur les deux extrémités de la bulle. Au reste, il est sûr que l'un et l'autre procédé sont également inexacts si le tube est mal travaillé en dedans.

301. Ordinairement on a coutume de placer le zéro de la division, comme je viens de le dire, au milieu du tube ou à-peu-près au milieu. Cela est en effet plus commode et on a ainsi des nombres plus simples. Mais cette condition n'est nullement nécessaire; on pourrait faire partir les divisions d'une des extrémités, et la demi-somme des divisions marquées par les extrémités de la bulle donnerait toujours la position de son centre: en général quelque part que le centre de la division fût placé sur le tube, le niveau servirait également.

302. L'extrême perfection que l'on a donnée aux niveaux dans ces derniers tems, a permis de les rendre fixes dans les cercles répétiteurs; et de déterminer, par leur variation, les changemens d'inclinaison de l'axe. Par ce moyen on évite la nécessité où l'on était de corriger ces changemens en replaçant le niveau, ce qui exigeait du tems, et multipliait la difficulté des observations par l'union qu'il fallait établir entre l'observateur qui dirige la lunette sur l'astre et celui qui cale le niveau.

Dans cette nouvelle disposition, le niveau est attaché fixement à la colonne verticale autour de laquelle le cercle tourne. Il est placé perpendiculairement à la direction de cette colonne, et parallèlement au limbe. Le limbe lui-même peut aussi s'attacher fixement à la colonne, ou plutôt à un plan vertical qu'elle porte, et sur lequel le limbe se fixe comme sur un mural au moyen de deux fortes vis de pression. Pour faire la première observation,

on commence comme à l'ordinaire par mettre la lunette du limbe sur le zéro de la division; ou, ce qui revient au même, on lit exactement les points de la division auxquels les verniers répondent : ces points servent d'origine aux arcs que la lunette décrit. Ensuite on détache le limbe, on le tourne jusqu'à ce que la lunette se dirige vers l'astre; puis on l'attache, et on achève de mettre l'astre sous le fil au moyen des vis de rappel. A cet instant on note la minute, la seconde, et le second observateur lit le niveau. Alors on fait faire au cercle une demi-révolution comme à l'ordinaire, autour de la colonne verticale, pour passer à la seconde observation. Cette fois, laissant le limbe fixe, on détache la lunette et on la ramène sur l'astre. Si la colonne, ou plutôt si l'axe de rotation du cercle est demeuré invariablement vertical, comme on suppose qu'il l'était d'abord dans la première observation, le niveau ne sera pas dérangé par le retournement. L'arc parcouru sur le limbe sera double de la distance au zénith, sans aucune correction. Mais si l'axe n'est pas exactement vertical, ou s'il a pris quelque inclinaison dans le passage de la première observation à la seconde, comme c'est autour de lui que la rotation s'exécute, la bulle du niveau ne répondra plus aux mêmes points du tube après le retournement. C'est pourquoi l'observateur lit encore le niveau dans cette seconde position comme il l'avait lu dans la première, et au moyen de ces deux lectures, on trouve l'inclinaison de l'axe de rotation sur la verticale.

303. Pour concevoir comment cela se peut faire, examinons avec soin les positions respectives du niveau, et de l'axe de rotation du cercle dans les deux observations consécutives. Soit *fig.* 82, *PA* la direction de cet axe; *AZS* l'arc de cercle qui représente la section longitudinale du niveau. Soit *C* le centre du niveau qui pourra bien ne

Digitized by Google

pas se trouver sur le prolongement de l'axe de rotation, et qui ne s'y trouvera que dans le cas où cet axe serait perpendiculaire au niveau. L'angle CAP sera l'inclinaison de l'axe du niveau sur l'axe du cercle, inclinaison que nous nommerons I'. Si par le pied du cercle ou par le point P on élève la verticale PV, l'angle VPA, que nous nommerons I, sera l'inclinaison de l'axe de rotation du cercle sur cette verticale. Enfin si par le centre C du niveau on élève une autre verticale CZ qui ira rencontrer en Z sa circonférence, le point Z sera le centre de la bulle, puisque ce centre doit toujours se trouver au point le plus élevé du niveau ; et l'arc AZ, compté sur la division circulaire du niveau, sera la mesure de l'angle ZCA, c'est-à-dire, de l'inclinaison du rayon CA sur la verticale. Or, en prolongeant la direction AP de l'axe jusqu'à sa rencontre avec la verticale CZ en D; il est visible que l'angle ZCA extérieur au triangle CAD est égal à la somme des deux intérieurs CAD, CDA; nous avons nommé le premier I'; quant au second, il est égal à VPA ou à I. Ainsi, en substituant à ces angles leurs valeurs en parties du niveau, on aura $AZ = I + I'$.

Maintenant, si l'on retourne le cercle comme dans la *fig.* 83, la rotation s'exécutant autour de l'axe AP, le rayon CA du niveau décrira autour de cet axe une surface conique; de sorte qu'après le retournement, l'inclinaison CAP se trouvera la même, dans un sens opposé, c'est-à-dire, encore égale à I'. De plus, si par la nouvelle position du centre C, on élève la verticale CZ', le point Z' sera le centre de la bulle dans la nouvelle position du niveau ; l'angle $Z'D'A$ sera encore égal à I, et par un raisonnement semblable à celui que nous venons de faire, on aura $AZ' = I - I'$.

Ainsi donc l'arc AZ, dans la première lecture, est la

somme des inclinaisons de l'axe du cercle, sur la verticale et sur le rayon du niveau ; tandis que dans la seconde lecture, l'arc AZ' est égal à la différence de ces mêmes angles ; d'où il suit que l'inclinaison du niveau sur l'axe du cercle est égale à la demi-différence de ces arcs, et l'inclinaison de l'axe du cercle sur la verticale est égale à leur demi-somme, c'est-à-dire, que l'on a

$$I' = \frac{AZ - AZ'}{2}, \quad I = \frac{AZ + AZ'}{2}.$$

Reste maintenant à évaluer ces arcs AZ, AZ'. Cela serait facile si l'origine des divisions du niveau se trouvait justement au point A, sur le prolongement de l'axe de rotation ; car alors la simple lecture exprimerait leurs valeurs. Mais, quelle que soit l'origine des divisions, il est facile d'obtenir ces valeurs, d'après les deux lectures combinées, et on en tire aussitôt la correction due à l'inclinaison de l'axe (*).

(*) Soit, *fig.* 82, M l'origine des divisions du niveau, ou la position du point zéro sur le tube ; nommons A la distance AM, depuis cette origine jusqu'à l'intersection du niveau par le prolongement de l'axe de rotation ; soit $2L$ la longueur totale de la bulle, et désignons par N et S les coordonnées de ses deux extrémités nord et sud, c'est-à-dire, les distances de ces extrémités à l'origine M des divisions. Ce sont ici les arcs MN, MS. Cela posé, le point Z étant supposé le milieu de la bulle, on aura, dans cette première position du niveau et du limbe,

$$S = AZ + L - A \qquad N = AZ - L - A.$$

Retournez le limbe pour passer à la seconde observation, *fig.* 83. Dans ce mouvement, le point M passera en M' de l'autre côté de l'axe. Soit Z' le centre de la bulle dans cette nouvelle position, et nommons de même N', S', les coordonnées de ses deux extrémités nord et sud, c'est-à-dire les arcs $M'N'$, $M'S'$, on aura

Digitized by Google

304. Pour voir l'effet de cette inclinaison sur les distances au zénith, soit, *fig.* 84, C le centre du limbe, CZ la verticale, CS le rayon visuel mené à l'astre que l'on observe ; l'angle SCZ sera la distance vraie au

---

alors

$$S' = AZ' + L + A \qquad N' = AZ' - L + A\,;$$

de ces expressions on tire

$$AZ + AZ' = N + S' \qquad AZ + AZ' = N' + S\,,$$

$$AZ - AZ' = N - N' + 2A \qquad AZ - AZ' = S - S' + 2A\,;$$

or, $\frac{AZ + AZ'}{2}$ est l'inclinaison de l'axe du cercle sur la verticale du côté du nord, inclinaison que nous avons nommée I; et $\frac{AZ - AZ'}{2}$, est l'angle formé par l'axe du cercle avec le rayon du niveau; angle que nous avons nommé I'. On aura donc, pour ces quantités, les valeurs suivantes :

$$I = \frac{S' + N}{2}, \quad \text{ou bien } I = \frac{S + N'}{2}\,;$$

$$I' = \frac{N - N'}{2} + A, \quad \text{ou bien } I' = \frac{S - S'}{2} + A.$$

Pour avoir plus de symétrie dans les calculs, nous avons supposé que le point M, origine des divisions, tombait au-dehors de la bulle, du côté du nord. Ordinairement on fait la bulle assez grande pour que cette origine tombe entre ses extrémités, et à-peu-près à son milieu, quand le niveau est horisontal. Alors la distance N de l'origine des divisions, à l'extrémité nord, doit être regardée comme négative, dans les formules que nous venons d'obtenir; il en sera de même de N'; et, avec cette modification, les expressions précédentes deviendront

$$I = \frac{S' - N}{2}, \quad I' = \frac{S - N'}{2}\,;$$

$$I' = \frac{N' - N}{2} - A, \quad I' = \frac{S - S'}{2} + A.$$

Nous nous bornerons à examiner les deux premières, qui donnent

zénith. Maintenant soit CP la direction de l'axe de rotation du cercle, que nous supposons incliné sur la verticale du côté de l'astre ; cet axe, prolongé jusqu'en Z', déterminera le zénith apparent autour duquel le limbe tourne. Or, c'est à ce zénith apparent que l'on

---

l'inclinaison de l'axe, les deux autres renfermant la distance A qu'il est impossible de connaître, ne peuvent être appliquées. Mais heureusement l'angle I' qu'elles déterminent n'est pas nécessaire aux observations. Considérons donc les deux dernières. Il est visible que N et S' sont les coordonnées d'une même extrémité physique de la bulle, avant et après le retournement ; car si cette extrémité était nord dans la première observation, elle est sud dans la seconde. Il en est de même de N' et S : ce sont les coordonnées de l'autre bout de la bulle. De là résulte la règle suivante : observez, sur la division du tube, les deux nombres auxquels répond une même extrémité physique de la bulle dans les deux observations consécutives. La demi différence de ces nombres exprimera l'inclinaison de l'axe, vers le bout que vous avez considéré comme négatif, c'est-à-dire, vers le nord si ce bout était dirigé au nord du zénith dans la première observation : vers le sud s'il était dirigé au sud.

Cette règle peut encore être exprimée d'une manière plus simple en la rapportant aux positions que prend successivement le niveau, relativement à l'observateur chargé de lire ses divisions. Je suppose que dans la première observation, le bout *sud* de la bulle soit à gauche de l'observateur. Le bout *nord* sera à sa droite. On retourne le limbe pour passer à la seconde observation. Celui qui lit le niveau se retourne aussi en passant de l'autre côté du limbe. Alors le bout gauche de la bulle est encore le même bout physique que précédemment ; seulement au-lieu d'être dirigé au sud du zénith, il est dirigé au nord. Ainsi en désignant par G ; D ; G' ; D' ; les extrémités gauche et droite de la bulle dans les deux observations : on aura $S = G$; $N = D$; $S' = D'$; $N' = G'$. En substituant ces lettres dans notre formule, qui donne l'inclinaison de l'axe vers le bout N ou D, on aura

$$I = \frac{D' - D}{2}, \quad \text{ou bien } I = \frac{G - G'}{2},$$

Digitized by Google

rapporte, sur le limbe, toutes les distances observées. Car le point du limbe qui reste fixe dans le retournement, est le point A', situé sur la direction de l'axe de rotation de l'astre, au lieu que ce devrait être le point A, situé sur le prolongement de la verticale. L'erreur de chaque

---

sous cette forme l'interprétation de la formule n'offre aucune incertitude; et l'application peut en être rendue très-simple par la disposition suivante. Ecrivez successivement les lectures des deux extrémités de la bulle sur deux colonnes, que vous intitulerez G et D, c'est-à-dire, gauche et droite, comme on le voit ici :

Gauche.	Différences.	Droite.	Différences.
142		136	
	+ 12		+ 12
130		148	
142		136	
	+ 12		+ 12
130		148	
144		134	
	+ 10		+ 10
134		144	

La première contiendra les valeurs successives de G; G', pour chaque couple d'observations; la seconde les valeurs de D; D'. Formez les différences de ces valeurs pour chaque couple; vous aurez ainsi $G - G'$ et $D' - D$. Prenez la moitié de ces valeurs, vous aurez l'inclinaison I du sommet de l'axe vers le côté D de la bulle, ou vers le côté D du zénith.

Ici, par exemple, chacun des deux premiers couples, donne $\frac{D' - D}{2} = +6$; c'est-à-dire, que le sommet de l'axe est incliné de 6 parties vers le côté D du zénith; par conséquent vers le nord si le bout D est tourné au nord du zénith. Si l'astre observé est situé de ce même côté, comme dans la *fig.* 83, les distances au zénith seront trop petites de 6 parties du niveau, et il faudra les augmenter de cette quantité. Ce serait 2″ sexagésimales dans notre niveau de Dunkerque. Mais si l'astre observé était situé au sud du zénith du

Digitized by Google

distance est donc égale à ZCZ', c'est-à-dire, à l'inclinaison de l'axe sur la verticale. Elle diminue les distances au zénith, lorsque le sommet de l'axe penche vers l'astre, comme dans la *fig.* 84; au contraire, elle augmente ces distances quand le sommet de l'axe s'éloigne de l'astre,

---

côté S, et qu'on eût lu le niveau comme nous le supposons ici, l'inclinaison vers N augmenterait les distances zénithales, et il faudrait la retrancher.

On trouverait le même résultat par le bout gauche de la bulle, car il donne $G = 142$, $G' = 130$, par conséquent $I = \frac{G - G'}{2} = +6$.

La troisième couple d'observations présente un petit changement dans l'inclinaison, car on ne trouve plus que $I = +5$. On forme ainsi toutes les différences relatives à chaque couple d'observations, et on en prend la moyenne, qui est la correction à appliquer à la distance moyenne déduite des lectures extrêmes de l'arc observé. Dans cette addition, il faut écrire chacune des différences $D' - D$ ou $G - G'$ avec son signe, car les unes peuvent être positives et les autres négatives, si le niveau éprouve quelque dérangement dans le cours de la série; et cela arrive ainsi presque toujours quand l'inclinaison I est fort petite. Si le tube est parfaitement calibré, et si la température ne varie pas, la longueur de la bulle reste constante; et il suffirait d'observer une des deux extrémités; mais comme on ne peut jamais être assuré d'éviter absolument toutes ces variations, il est toujours bon d'observer les deux bouts de la bulle, et de prendre la différence moyenne.

Il y a toujours de l'avantage à se faire une pratique constante, dans les opérations qui doivent être souvent répétées. C'est pourquoi il est bon de lire toujours le niveau de la même manière, par exemple, en se plaçant de manière que le côté D soit dirigé vers l'astre que l'on observe : alors si $\frac{D' - D}{2}$ ou Z est positif, on l'ajoutera à la distance au zénith; s'il est négatif, on le retranchera. Tout se réduit alors à observer cette règle fort simple, et l'on ne peut jamais se tromper sur le sens de l'inclinaison.

Digitized by Google

relativement à la verticale, comme dans la *fig.* 85. Ainsi, dans le premier cas, la correction déterminée par le niveau doit être ajoutée à la distance au zénith; dans le second, elle doit être retranchée. La verticalité de l'axe n'était pas nécessaire dans les anciens cercles, parce que l'on redressait le limbe après le retournement, au moyen des vis de rappel, de manière à rappeler le niveau à sa position primitive. Cela n'est plus possible dans les nouveaux cercles, puisque le niveau n'est pas attaché immédiatement sur le limbe, mais sur la colonne de l'instrument. A la vérité, on pourrait encore ramener tout l'instrument à-la-fois, en élevant ou abaissant les vis adaptées à la base de la colonne, et qui servent à la rendre verticale. Mais il est mille fois plus simple, plus commode et plus exact d'observer la déviation du niveau, et d'en corriger l'effet sur les observations, d'autant mieux que le calcul et l'application de cette correction n'offrent aucune difficulté.

Cette méthode suppose seulement comme une condition rigoureuse et indispensable, que le limbe du cercle reste fixement attaché à l'axe de rotation dans les deux observations consécutives, sans que les pinces qui le retiennent lui permettent le plus petit mouvement. Si cette condition n'était pas remplie, le point du limbe qui répond au prolongement de l'axe de rotation, ne resterait pas le même dans les deux observations consécutives, et ce déplacement produirait une erreur qu'il serait impossible d'apprécier. Il faut donc employer les soins les plus minutieux pour que le point d'attache de l'axe de rotation avec le limbe soit rigoureusement fixe; et c'est à quoi notre excellent Fortin est parvenu, comme je l'ai dit plus haut, en serrant le limbe au moyen d'une forte pince et de deux vis de pression, contre un plan vertical de cuivre

qui fait corps avec l'axe, et sur lequel le limbe vient s'appuyer.

305. Il peut arriver, et il arrive ordinairement, que l'axe du cercle ne conserve pas rigoureusement la même inclinaison dans toute la durée d'une longue série; mais le niveau accuse toutes ces variations, et comme on le lit à chaque observation, il détermine, pour chaque correction, sa valeur véritable : cependant la moyenne seule de ces corrections reste dans le résultat moyen.

306. Quand on doit faire une longue suite d'observations, par exemple, quand on veut déterminer une latitude avec la dernière précision, on a soin de calculer chaque jour, la valeur qu'à eue l'inclinaison de l'axe; et comme on peut faire varier à volonté cette inclinaison, au moyen des vis de rappel adaptées à la base de la colonne, on s'arrange de manière qu'elle ait successivement, de part et d'autre du zénith, des valeurs à-peu-près égales. Alors les corrections positives et négatives du niveau se compensant d'elles-mêmes, on est indépendant de la valeur de ses parties, ou du moins, si la compensation n'est pas rigoureusement exacte, le nombre des parties du niveau qui reste dans le résultat moyen est si petit, que l'erreur que l'on a pu commettre dans leur évaluation est absolument insensible. C'est ainsi que nous en avons usé dans les observations de Formentera et de Dunkerque; quant à la mesure des parties du niveau, et à la détermination de leurs valeurs, on opère comme nous l'avons dit dans la page 335.

Digitized by Google

CHAPITRE XXI.

Instrumens dont on se sert en mer; description et usages du Sextant.

(Ce chapitre et les deux qui suivent sont de M. de Rossel.)

307. Les astronomes observent les hauteurs des astres avec des instrumens à niveau ou à fil à-plomb, et les obtiennent avec une très-grande précision ; mais les marins, qui sont dans des vaisseaux agités par les flots, ne peuvent faire aucun usage de ces instrumens. Ils sont obligés de rapporter les astres dont ils veulent mesurer la hauteur, au cercle qu'on appelle horison visuel, et qui termine la partie visible de la mer, dont ils sont environnés. L'observateur se trouve au centre de ce cercle, et voit tous les points de sa circonférence également éloignés du zénith. La distance angulaire de tous les points de l'horison visuel au zénith étant connue, il ne s'agit plus, pour obtenir la distance au zénith d'un astre quelconque, ou sa hauteur, que de pouvoir mesurer l'arc du vertical compris entre l'horison et l'astre que l'on veut observer. Tous les instrumens dont on s'est servi jusqu'à présent, en mer, pour obtenir les hauteurs des astres, ont eu pour but cette mesure.

308. L'astrolabe et l'arbalestrille sont les premiers dont les marins aient fait usage; mais, comme on va le voir, ils étaient bien imparfaits. L'astrolabe est une espèce

Digitized by Google

d'anneau astronomique, *ABCD*, chargé d'une alidade *EF*, garnie de pinnules à ses deux extrémités. Lorsqu'on tient l'instrument suspendu par le petit anneau *A*, la ligne *CD* doit être horisontale ; et alors l'alidade *EF* étant dirigée sur le soleil, l'angle *FID*, ou son égal *EIC*, compté sur l'instrument, est la mesure de la hauteur de l'astre. L'astrolabe participait donc de tous les défauts des instrumens à niveau et à fil à-plomb, et, par cette raison, devait être bientôt abandonné.

L'arbalestrille est restée plus longtems en usage que l'instrument dont on vient de parler. On sait que l'on peut connaître la hauteur du soleil par la longueur des ombres qu'un corps de dimensions connues projette sur un plan horisontal ; dans l'arbalestrille, il s'agit d'obtenir la hauteur du soleil par la longueur de l'ombre projetée sur un plan dont l'inclinaison est donnée. Cet instrument est tel qu'on le voit représenté dans la *fig.* 2 : *AE* est une pièce de bois équarrie, dans laquelle on fait entrer la pièce *CD*, qui doit être fixée à l'extrémité *A* ; la pièce *ELK*, au contraire, est mobile. Lorsqu'on veut faire une observation, on regarde en *D*, et l'on fait coïncider la partie *LK* de la pièce *ELK* avec l'horison opposé au soleil ; on place en même tems cette pièce *ELK* à l'extrémité de l'ombre que la branche *AC* projette sur *AE*. Puisque la ligne *DH* est toujours dirigée à l'horison, son inclinaison est la même dans toutes les observations, ainsi que celle des lignes *AE*, *AC* ; on peut donc déduire la hauteur du soleil de la longueur de l'ombre que *AC* porte sur la flèche *AE*. Au lieu de marquer la longueur de l'ombre à tous les points de division de *AE*, on écrit ordinairement la hauteur que doit avoir le soleil, lorsque l'ombre parvient à chacun de ces points ; et par ce moyen, l'arbalestrille la

Digitized by Google

donne directement; mais on ne peut jamais savoir quel est le point du soleil dont on a observé la hauteur, ce qui rend les observations faites avec cet instrument très-défectueuses.

309. Dès qu'on eut trouvé le moyen de mesurer la hauteur du soleil, ou l'angle *SOD*, par la longueur de l'ombre que la branche *AC* porte sur la flèche *AE*, le premier pas qui dut être fait vers la perfection, était de mesurer le même angle par un arc de cercle, comme on le voit dans la *fig.* 3, qui représente un quartier anglais. Cet instrument est un quart-de-cercle entier; mais pour le rendre moins embarrassant, il est formé de deux arcs concentriques d'un rayon différent. Lorsqu'on veut prendre la hauteur du soleil, on fixe en *C*, sur un des points de division du petit cercle, une espèce de pinnule qui porte un verre convexe, dont le foyer est à-peu-près en *O*. On regarde à travers la pinnule mobile *D* et une fente pratiquée en *O*, la partie de l'horison opposée au soleil; ensuite on fait glisser la pinnule *D*, jusqu'à ce que le point lumineux formé par le verre convexe de la pinnule *C*, vienne coïncider avec l'horison. La somme des deux arcs *BC*, *AD* est égale à l'angle *SOD* ou à la hauteur du soleil. Il est possible de s'assurer de la position de la ligne *SCO*, par rapport à celle qui passe par le centre du soleil; on pouvait donc avoir directement la hauteur du centre. Mais les plus grandes erreurs des hauteurs observées avec le quartier anglais, proviennent de ce qu'il est très-difficile de faire coïncider le point lumineux avec l'horison; et il avait encore cet inconvénient de commun avec l'arbalestrille, qui n'offrait pas moins de difficultés lorsqu'on vouloit faire coïncider ensemble l'extrémité de l'ombre et l'horison. Les instrumens dont on vient de parler ne

Google

sont plus en usage, et ce qui en a été dit doit suffire pour faire connaître les différens degrés par lesquels on est parvenu à perfectionner les instrumens dont les marins se sont servis.

310. Depuis que l'on a adapté des miroirs aux instrumens d'astronomie nautique, on est parvenu à leur donner une telle précision, que les instrumens à réflexion sont les seuls qui soient en usage, et dont il soit nécessaire de parler avec une certaine étendue : non-seulement ils servent à mesurer les hauteurs des astres et à obtenir la latitude avec un degré d'exactitude auquel il avait été impossible d'atteindre avec les autres instrumens, mais encore en donnant les moyens de mesurer exactement les distances de la lune au soleil ou aux étoiles, ils nous ont fait obtenir la longitude avec une précision qui ne laisse rien à desirer pour la sûreté de la navigation. On distingue trois sortes d'instrumens à réflexion, l'octant, le sextant et le cercle. Les deux premiers ne diffèrent entre eux que parce que l'arc gradué de l'un est plus grand que celui de l'autre : avec un octant, on ne peut pas mesurer un arc plus grand que 90°; avec un sextant, on mesure les arcs jusqu'à 120°. Nous nous contenterons donc de parler du sextant et du cercle à réflexion.

311. La boussole, dont la plus grande utilité est de faire connaître la route que doivent suivre les vaisseaux, a été regardée, par cette raison, comme un instrument purement nautique ; mais l'usage que l'on en fait pour observer les relèvemens du soleil, lorsqu'on veut connaître la déclinaison de l'aiguille aimantée, ou pour d'autres objets relatifs à l'astronomie, nous engage à la comprendre dans les instrumens d'astronomie nautique,

Digitized by Google

et à donner une idée de sa construction et de la manière dont on doit s'en servir.

Des Instrumens à réflexion en général.

312. Avant de donner la description des instrumens à réflexion, il convient de faire connaître le principe fondamental de leur construction. Il dérive de la propriété qu'ont tous les miroirs de réfléchir les rayons de lumière, de manière à ce que le rayon réfléchi fasse avec la surface du miroir, un angle égal à celui que le rayon incident fait avec cette même surface. Cela posé, si les rayons du soleil, par exemple, viennent à frapper perpendiculairement la surface d'un miroir, ces rayons seront réfléchis suivant la même direction, et les deux images se confondront. A présent, si l'on incline le miroir, et que les rayons du soleil viennent à le frapper obliquement, alors les rayons incidens feront avec la perpendiculaire à la surface de ce miroir, un angle égal à celui de son inclinaison ; et puisque l'angle de réflexion doit toujours être égal à l'angle d'incidence, les rayons réfléchis s'écarteront de l'autre côté de la perpendiculaire, de la même quantité. L'angle formé par les rayons incidens et les rayons réfléchis sera donc double de l'inclinaison que l'on a donnée à la surface du miroir. Je suppose que l'on ait fait coïncider un des bords de l'image réfléchie du soleil avec le bord d'un objet terrestre quelconque, il est clair que les rayons réfléchis du bord de cette image seront confondus avec les rayons directs des parties de l'objet qui seront en contact avec lui : l'angle que les rayons directs des bords du soleil et de l'objet font entre eux, sera donc égal à l'angle formé par les rayons incidens et réfléchis du soleil ; et, d'après ce qui a été dit

plus haut, il sera double de l'angle d'inclinaison de la surface du miroir. Si l'on veut avoir la distance angulaire du soleil à un objet quelconque, ou celle de deux objets terrestres, il faudra donc adapter un miroir à un instrument gradué, qui soit propre à donner directement la mesure des différens degrés d'inclinaison que ce miroir peut prendre : tel est le but qu'on s'est proposé dans la construction des instrumens à réflexion.

Le Sextant.

313. Le sextant est un secteur de cercle *ABC* (*fig.* 4 et 5), de 60°, dont les parties principales peuvent être de bois, mais on les fait ordinairement en cuivre. Leurs dimensions doivent être assez fortes pour qu'aucune d'elles ne soit sujette à fléchir, lorsqu'on tient l'instrument par la poignée *E*. *AB* est une bande de cuivre circulaire et plate, qu'on nomme le limbe de l'instrument, sur laquelle est marquée la graduation. La règle mobile *CD*, ou l'alidade, tourne autour du centre *C*, et vient aboutir au limbe du sextant; elle porte en *C* un miroir plan, dont les surfaces doivent être perpendiculaires au plan de l'instrument. Ce miroir s'appelle le grand miroir; il doit tourner avec l'alidade, et celle-ci marquera sur le limbe la valeur de l'arc *DB*, dont il a été écarté de sa première position, après les diverses positions qu'on lui aura fait prendre. Comme la graduation est destinée à donner la mesure des angles formés par les rayons réfléchis d'un même objet, et que ces angles sont doubles de ceux qui ont été parcourus par le grand miroir *C*, on a divisé les degrés en deux parties; on doit donc compter les demi-degrés pour des degrés, afin d'avoir directement la mesure des angles observés. Chacun de ces

Digitized by Google

degrés est divisé en trois parties de 20′ chacune. Les minutes et les fractions de minutes se comptent à l'aide d'un nonius, placé à l'extrémité de l'alidade, comme dans tous les instrumens d'astronomie.

A présent, si l'on veut que le sextant soit propre à l'observation de la distance angulaire de deux objets quelconques, il est nécessaire de placer vis-à-vis de l'œil de l'observateur, un corps transparent et poli, à travers lequel on puisse appercevoir l'objet que l'on regarde directement, et où vienne se peindre en même tems l'image de l'autre objet, après qu'elle a été réfléchie par le grand miroir. Sur le côté *CB* (*fig.* 6) est une lunette *O*, ou un tuyau de cuivre sans verres. Je suppose qu'on regarde par ce tuyau un objet très-éloigné, on le verra suivant la direction *HO*. Le rayon direct *KC* du même objet, qui vient frapper la surface *LG* du grand miroir peut être considéré comme parallèle à *HO*, à cause de l'éloignement de l'objet et de la petite distance *CO* : si l'on regarde un astre, ces deux lignes seront rigoureusement parallèles, si c'est un objet terrestre éloigné d'une lieue et demie, l'angle qu'elles feront entre elles ne sera pas de quatre centièmes de secondes; ainsi on peut, dans tous les cas, supposer qu'elles sont parallèles. Le rayon *KC* sera réfléchi suivant la ligne *CN*, qui fera *GCN* égal à *LCK*. Si l'on fixe au point *N* une petite glace *IF*, qui n'ait pas encore été étamée, mais dont les surfaces soient perpendiculaires au plan de l'instrument et parallèles à celles du grand miroir *LG*, cette glace réfléchira le rayon *KCN*, suivant la ligne *NO*, parallèle à *KC*. L'œil sera frappé par le rayon *KCNO* de la même manière que s'il partait du point *N*; il le rapportera donc à ce point : il rapportera aussi au point *N* l'image vue directement par le rayon *HNO*,

Digitized by Google

les images directes et réfléchies paraîtront donc entièrement confondues. Faisons avancer l'alidade de *B* vers *A*, le grand miroir prendra la situation *lg*, et fixons-la dans la position *CD*; les directions *HO*, *NC*, restant les mêmes, on ne verra plus, au point *N*, l'image réfléchie de l'objet que l'on regarde directement à travers le petit miroir; mais on y appercevra l'image d'un autre objet placé dans la direction *CS*, de manière à ce que l'angle *SCl* soit égal à l'angle *NCg*. Or *KC* étant parallèle à *HO*, l'angle *KCS* est égal à la distance angulaire de l'objet vu directement à l'objet réfléchi *S*; et par la propriété des miroirs, il est égal au double de l'angle *GCg* ou de l'arc *BD*, qui, sur le limbe de l'instrument, a pour valeur le nombre de degrés et de minutes marqués par l'alidade *CD*.

314. Nous devons remarquer que si l'on fait glisser successivement l'alidade *CD* sur le limbe de l'instrument, en allant de *B* en *A*, tous les objets qui se trouveront au-delà de *S*, et dans le plan de l'instrument, viendront alternativement se peindre en *N*, et coïncider avec l'objet *H*; chacune des images réfléchies aura donc, dans l'ouverture du tuyau *O*, et sur le petit miroir, un mouvement de *I* vers *F*: on les verra d'abord paraître du côté de *I*, et on les perdra de vue du côté de *F*. On peut en conclure une méthode facile de mettre en contact dans l'ouverture du tuyau, ou dans le champ de la lunette, deux objets dont on ignore la distance angulaire. Il faut placer l'alidade *CD* dans la position *CB*, où elle répond au point zéro de la graduation, et où les deux miroirs sont parallèles : ensuite on regardera l'astre *S* avec la lunette ou le tuyau *O*, alors les deux images seront confondues; mais si l'on fait mouvoir l'alidade d'une petite quantité de *B* vers *D*, elles se déta-

Digitized by Google

cheront, l'image réfléchie s'avancera de *N* vers *F*, et se trouvera entre les deux objets *S* et *H*. Je suppose que l'on tienne l'instrument dans le plan des rayons visuels qui partent des deux objets, et que l'on fasse mouvoir l'alidade de *B* en *D*, en conservant l'image réfléchie de l'objet *S* dans le champ de la lunette ou du tuyau ; cette image réfléchie se rapprochera de plus en plus de l'objet *H*, enfin elle coïncidera avec lui : alors l'instrument se trouvera dans la première position que nous lui avons donnée, c'est-à-dire, qu'on verra l'image directe de *H* et l'image réfléchie de *S* en contact dans le champ de la lunette. Cette méthode est celle que l'on pratique pour ramener l'image d'une étoile à l'horison ; comme on ne perd pas de vue l'image réfléchie de celle que l'on a d'abord regardée directement, on évite toute méprise, et l'on acquiert la certitude de ne pas observer une des étoiles qui en sont voisines.

315. Nous avons supposé que le petit miroir *IF* n'avait pas été étamé ; mais dans ce cas, la lumière des objets qui ne sont pas lumineux par eux-mêmes, se trouve tellement affaiblie lorsqu'elle parvient à l'œil de l'observateur, qu'il est difficile d'en voir distinctement les bords sur le petit miroir *IF*. Pour remédier à cet inconvénient, on étame la moitié de ce petit miroir, qui est la plus proche du plan de l'instrument ; l'autre moitié reste transparente. Lorsqu'on veut prendre la distance angulaire de deux objets terrestres, on regarde l'objet vu directement à travers la partie transparente, et l'on conserve l'image de l'objet vu par réflexion sur la partie étamée, où elle est aussi bien terminée que l'image directe du premier objet ; ensuite on met ces deux images en contact sur la ligne qui sépare la partie étamée de celle qui ne l'est pas. Si l'on fait usage d'une lunette, cette séparation n'est pas très-

Digitized by Google

distincte, mais l'observation n'en est pas moins facile, parce qu'on observe le contact dans la partie du champ de la lunette où les deux images ont à-peu-près le même degré de lumière.

316. Au-dessous du support du tuyau ou de la lunette, on a placé une vis qui sert à les rapprocher ou à les éloigner du plan de l'instrument. Toutes les fois que l'on veut augmenter la lumière de l'image réfléchie, il faut rentrer la lunette ou le tuyau aussi près qu'on le peut du plan de l'instrument; au contraire, si l'on veut diminuer la lumière de cette image, il faut sortir la lunette ou le tuyau, jusqu'à ce qu'on ne puisse plus voir que la partie transparente du petit miroir.

317. Lorsqu'on observe le soleil, ou un astre très-lumineux, ces moyens ne sont pas suffisans; on est obligé de placer, entre le grand et le petit miroir, des verres colorés pour diminuer l'éclat de la lumière. On en a ordinairement de trois nuances, et l'on en fait usage suivant l'intensité de la lumière de l'astre que l'on observe.

On conçoit que le double de l'arc *BD*, ou le nombre de degrés et minutes comptés, sur l'instrument, ne peut être la mesure de l'angle *SCK*, qu'autant que les surfaces des deux miroirs sont perpendiculaires au plan de l'instrument, que l'axe de la lunette est parallèle à ce même plan, et enfin que le contact des objets *S* et *H* a été observé près de cet axe. Il sera également nécessaire que les deux surfaces du grand miroir soient exactement parallèles entre elles, comme on le verra bientôt. Ces considérations donnent lieu à plusieurs vérifications dont nous allons parler.

Digitized by Google

Manière de vérifier si le grand miroir est perpendiculaire au plan de l'instrument.

318. La première vérification est de s'assurer si le grand miroir est perpendiculaire au plan de l'instrument. Pour y parvenir, il faut se placer de manière à voir, dans ce miroir, une partie du limbe; si l'image réfléchie de cette partie paraît être la continuation de celle que l'on voit directement à côté du grand miroir, ce sera une preuve que ce miroir est exactement perpendiculaire au plan de l'instrument. Si l'image réfléchie du limbe paraît plus élevée ou plus basse que la partie vue directement, ce sera une preuve que le grand miroir penche en arrière ou en avant; alors on lui donnera la position qu'il doit avoir, en tournant les vis qui servent à le fixer à l'alidade.

On fait aussi la même vérification avec deux pièces de cuivre, ou viseurs, de la forme de ceux de la *fig.* 7 ou de la *fig.* 8, dont la hauteur est à-peu-près la moitié de celle du grand miroir. Ces viseurs doivent être placés sur le limbe de l'instrument, de manière que l'un étant vu directement à côté du grand miroir, l'image réfléchie de l'autre paraisse coïncider avec lui. Si la partie supérieure de l'image réfléchie paraît être la continuation de la partie supérieure du viseur que l'on voit directement, le grand miroir sera perpendiculaire au plan de l'instrument; dans le cas où l'image réfléchie paraîtrait plus haute ou plus basse, on ramènerait le miroir, comme ci-dessus, à la position qu'il doit avoir, au moyen des vis qui le fixent à l'alidade.

Digitized by Google

Manière de vérifier si le petit miroir est perpendiculaire au plan de l'instrument.

319. Cette seconde vérification de la perpendicularité du petit miroir au plan de l'instrument, doit se faire sur un objet terrestre ou sur l'horison. On rentrera d'abord la lunette jusqu'à ce que son champ soit divisé en deux portions égales par la ligne qui sépare la partie étamée de celle qui ne l'est pas ; ensuite on fera mouvoir l'alidade jusqu'à ce que l'image réfléchie d'un objet terrestre vienne passer sur l'image directe du même objet. Si, pendant ce mouvement, les deux images se confondent un seul instant, ce sera une preuve qu'à cet instant les surfaces des deux miroirs étaient parallèles ; mais comme le grand miroir avait déja été placé perpendiculairement au plan de l'instrument, il en résulte que le petit miroir doit l'être aussi. Dans le cas où l'une des deux images déborderait l'autre, il faudrait tourner les vis du support du petit miroir jusqu'à ce que, en faisant mouvoir l'alidade, les deux images vinssent à se confondre.

320. Si l'on voulait faire cette vérification sans lunette, c'est-à-dire, avec le tuyau qu'on lui substitue quelquefois, il faudrait regarder l'horison en tenant l'instrument verticalement ; ensuite on ferait mouvoir l'alidade jusqu'à ce que l'image réfléchie que l'on voit dans la partie étamée du petit miroir, vienne se placer à côté de l'image directe, et paraisse en former la continuation. Lorsque les deux images se confondront ainsi en une seule ligne droite, on donnera alternativement à droite et à gauche, de grands degrés d'inclinaison à l'instrument ; et si, pendant ces balancemens, les deux images ne se séparent pas, ce sera une preuve que

Digitized by Google

le petit miroir est perpendiculaire au plan de l'instrument ; mais si elles se séparent, on tournera les vis du support du petit miroir jusqu'à ce qu'en balançant l'instrument, ces images ne paraissent plus se séparer.

Plusieurs auteurs ont cru que la même vérification pouvait se faire pendant la nuit, sur quelqu'étoile brillante ; mais cette méthode est dangereuse. Les deux images d'une même étoile paraissent souvent se confondre, par un effet de l'irradiation, tandis qu'elles sont réellement à une assez grande distance l'une de l'autre ; dès lors, on ne peut jamais répondre d'avoir placé convenablement le petit miroir.

L'observation doit être faite dans un plan parallèle à celui de l'instrument.

321. On a déja eu lieu de dire que l'arc marqué par l'alidade ne pouvait être la mesure exacte des angles observés, que dans le cas où le contact des deux objets aurait été observé dans un plan parallèle à celui de l'instrument. Il faut donc que l'ouvrier qui construit un sextant, ait l'attention de placer l'axe de la lunette, ou du tuyau qu'on peut lui substituer, parallèlement à ce même plan ; alors l'observateur n'aura d'autre soin à prendre que celui d'observer le contact, à-peu-près dans une ligne qui diviserait en deux parties égales le champ de la lunette ou l'ouverture du tuyau. Afin de faire connaître la direction de cette ligne, et de donner la facilité de juger sa position, on a mis au foyer de la lunette ou du tuyau, deux fils (*fig.* 9) parallèles entre eux, et qui sont éloignés l'un de l'autre d'un degré et demi à deux degrés. Lorsque ces deux fils sont parallèles au plan de l'instrument, il est aisé, avec un peu d'habitude, de faire

Digitized by Google

le contact des objets au milieu de l'espace qui les sépare ; c'est-à-dire à-peu-près, dans la ligne *EF*, qui détermine le plan qui est parallèle à celui de l'instrument.

Les surfaces du grand miroir doivent être parallèles.

322. Les rayons de lumière des objets ou des astres, sont réfléchis par la surface étamée du grand miroir, qui est la plus éloignée de ces objets ; ils éprouvent donc, en entrant dans l'épaisseur du miroir, une réfraction, et ils en éprouvent une seconde lorsqu'ils en sortent. Si les deux surfaces du miroir ne sont pas parallèles, ces deux réfractions seront inégales ; et les rayons réfléchis ne feront pas avec la surface de ce miroir un angle égal à celui des rayons qui sont venus le frapper directement. Les angles mesurés participeront alors de ce défaut du miroir, qui peut occasionner des erreurs d'autant plus fortes que l'inclinaison des rayons, incidens et réfléchis, sera plus grande. Les observations de distance de la lune aux étoiles et au soleil, qui souvent, sont de plus de 90°, pourront donc en être affectées d'une manière sensible. Borda a donné dans son Traité du cercle à réflexion, une méthode ingénieuse de corriger ces erreurs ; nous en parlerons à la suite de la description que nous ferons de cet instrument. Mais, comme on ne peut pas l'appliquer indifféremment à toute espèce d'instrument à réflexion, nous nous contenterons de dire à présent que les ouvriers ne sauraient prendre trop de soin pour vérifier les miroirs qu'on adapte à un sextant ; car c'est de leur perfection que dépend, en grande partie, la précision des angles mesurés avec ce dernier instrument.

Digitized by Google

Parallélisme des surfaces des verres colorés.

323. Les surfaces des verres colorés que l'on place entre le grand et le petit miroir, pour affaiblir la lumière du soleil ou de la lune, doivent être exactement parallèles. En effet, si elles ne l'étaient pas, les rayons de lumière qui partent du grand miroir et vont frapper sur le petit, seraient brisés en traversant les verres colorés; et l'erreur des angles observés serait égale à la quantité angulaire dont ces rayons auraient été détournés de leur première direction. On doit remarquer que la position de la ligne *CN* (*fig.* 6) est à-peu-près fixe, et que l'angle d'incidence sur la surface du verre coloré n'est sujet à varier que d'une quantité insensible; l'erreur occasionnée par le défaut de parallélisme des surfaces des verres colorés, sera donc la même pour tous les angles. Il est difficile de connaître cette erreur avec un sextant, c'est pourquoi l'artiste devra avoir la plus grande attention à n'adapter à l'instrument que des verres colorés dont les surfaces soient exactement parallèles.

Rectification du sextant.

324. Les arcs marqués par l'alidade sur le limbe de l'instrument, ne sont la mesure des angles observés, que dans le cas où l'alidade étant sur le point zéro de la graduation, les surfaces des deux miroirs se trouveraient parallèles. Il est donc nécessaire de vérifier si cette condition a lieu. Pour y parvenir, on placera les fils du tuyau dans une situation perpendiculaire au plan de l'instrument, ensuite on rapprochera le tuyau du même plan, jusqu'à ce que la ligne qui sépare la partie étamée du petit miroir de celle qui ne l'est pas, se trouve au

Digitized by Google

milieu de son ouverture. Après avoir fixé l'alidade sur le point zéro de la graduation, on regardera l'horison; et si l'image réfléchie que l'on voit dans la partie étamée, n'est ni plus élevée, ni plus basse que celle qui est vue directement, ce sera la preuve que les surfaces des deux miroirs sont parallèles. Dans le cas où l'une de ces deux images serait plus élevée que l'autre, sans déranger l'alidade, on desserrerait les vis du support du petit miroir, et après avoir mis ce miroir dans une situation où les deux images coïncident parfaitement, on le fixera de nouveau. Alors le nombre de degrés et de minutes comptés sur la graduation, sera la mesure exacte des angles observés.

325. On doit faire remarquer qu'il ne faut toucher aux vis du support du petit miroir que le moins possible, dans la crainte qu'elles ne finissent par prendre trop de jeu; ainsi il vaudra mieux opérer de la manière suivante. Au lieu de laisser l'alidade fixe, lorsqu'on regarde l'horison, il faut, au contraire, la faire mouvoir avec la vis de rappel, jusqu'à ce que l'image réfléchie coïncide avec l'image directe. Ensuite on regarde sur le limbe le point où elle répond. La quantité dont elle s'écartera du point de zéro à droite ou en dehors de la graduation, devra s'ajouter à tous les angles observés; et la quantité dont elle s'en écartera à gauche, devra, au contraire, être retranchée de ces mêmes angles. Je suppose que l'alidade répondait à 3′ en dehors ou à droite du point de zéro, ces 3′ devraient être ajoutées à tous les angles observés; si l'alidade avait répondu à 3′ à gauche du point de zéro, il aurait fallu les retrancher des mêmes angles. La quantité que l'on doit ajouter aux angles observés ou en retrancher, pour avoir égard au point du parallélisme des deux miroirs, s'appelle en général rectification de l'instrument.

Digitized by Google

326. Lorsqu'on se sert de lunette, il faut, ainsi qu'on a recommandé de le faire précédemment, placer les fils de l'oculaire perpendiculairement au plan de l'instrument; ensuite rapprocher la lunette de ce plan, jusqu'à ce que le champ soit divisé en deux parties égales par la ligne qui sépare la moitié étamée du petit miroir, de celle qui ne l'est pas. Mais, comme on l'a déja observé, cette séparation n'est pas distincte, ainsi quand on aura rapproché l'image directe de l'horison, de l'image réfléchie, au lieu de voir ces deux images terminées, comme lorsqu'on regarde dans le tuyau, on les verra s'avancer l'une à droite et l'autre à gauche, en dégradant de lumière. Les portions des images qui débordent la ligne qui sépare la moitié étamée du petit miroir de celle qui ne l'est pas, forment, au milieu de la lunette, deux espèces de petits nuages, dont la partie qui est la continuation de la ligne de l'horison paraît bien terminée; toutes les autres parties se perdent dans le vague par une dégradation successive de lumière. Dès que l'on fera mouvoir l'alidade pour faire coïncider les deux images, les parties des deux petits nuages qui paraissent bien terminées, se rapprocheront l'une de l'autre; et les miroirs ne seront dans une situation parallèle que, lorsque les nuages auront entièrement disparu. Alors on regardera sur le limbe, la quantité dont l'alidade s'éloigne à droite ou à gauche du point de zéro; et l'on aura la rectification de l'instrument, que l'on emploiera d'après les règles qui viennent d'être données.

Il est assez difficile de juger le point où les deux images de l'horison coïncident parfaitement; et l'on ne peut guère répondre d'obtenir la rectification de l'instrument à moins d'un quart ou un tiers de minute, et quelquefois à moins d'une demi-minute, sur-tout lorsque l'atmos-

Digitized by Google

phère est chargée, et que l'horison lui-même ne paraît pas bien terminé. Il faudra donc répéter plusieurs fois la même opération, et prendre pour rectification de l'instrument, le quotient de la somme de toutes les rectifications que l'on aura trouvées, divisée par le nombre d'observations. Si l'on veut obtenir le plus grand degré de précision auquel il soit possible d'atteindre par ce moyen, il faudra procéder de la manière suivante. Avant la première observation, on fera paraître l'image réfléchie de l'horison, au-dessus de l'image directe, et en tournant la vis de rappel on les fera coïncider; à la seconde observation, on fera paraître l'image réfléchie au-dessous de l'image directe, et l'on sera obligé de faire tourner la vis de rappel en sens contraire pour ramener ces deux images en contact. L'expérience a prouvé que les erreurs des observations qui ont été faites de ces deux manières différentes, avaient lieu en sens contraires; dès-lors le milieu arithmétique pris entre ces deux rectifications, ne sera affecté que d'une erreur égale à la moitié de la différence des erreurs de l'une et de l'autre. Nous tirerons de là une règle générale, très-utile dans la pratique, qui est, que l'on doit répéter la rectification de l'instrument un nombre pair de fois : avant toutes les observations impaires, on placera l'image réfléchie au-dessus de l'image directe; et avant toutes les observations paires, on la placera au-dessous.

327. La même rectification peut se faire sur le soleil de la manière suivante. On placera devant l'oculaire de la lunette ou derrière le petit miroir, un verre très-obscur qui puisse permettre de regarder cet astre directement. On fera d'abord coïncider un des bords de l'image réfléchie avec le bord le plus proche de l'image directe; ensuite on comptera sur le limbe, le nombre de degrés

Digitized by Google

et de minutes marqués par l'alidade. Cette première observation étant achevée, il faudra regarder une seconde fois le soleil; alors on fera mouvoir l'alidade de manière à faire passer les deux images l'une sur l'autre, et l'on mettra les deux autres bords en contact. Il sera nécessaire de compter, comme, à la première observation, le nombre de degrés et de minutes marqués par l'alidade. Puisque les deux miroirs devaient être parallèles, lorsque les deux images ont paru confondues, l'un des deux arcs a dû être compté à droite du point de zéro, et l'autre arc a dû l'être à gauche. De plus, ce point de parallélisme doit se trouver au milieu de l'arc parcouru par l'alidade dans les deux observations. Il suit de là que si les deux arcs comptés sur l'instrument à la fin de chaque observation, sont égaux, ce sera une preuve que les miroirs sont parallèles, lorsque l'alidade répond au point zéro de la graduation: alors la rectification de l'instrument est nulle. Si l'arc qui a été compté à droite du point de zéro est le plus grand, l'alidade se trouvait à droite de ce point, lorsque les deux miroirs étaient parallèles; alors la moitié de la différence des deux arcs comptés sur l'instrument, est la quantité qu'il faut ajouter à tous les angles observés. Dans le cas où l'arc compté à gauche du point de zéro, est le plus grand, la moitié de la différence des mêmes arcs, est la quantité qu'il faut retrancher de tous les angles observés.

On a recommandé, art. 320, de ne pas vérifier la perpendicularité du petit miroir, à l'aide de l'image directe et de l'image réfléchie d'une étoile brillante; les raisons qui engagent à proscrire l'usage des étoiles pour cette vérification, deviennent bien plus fortes quand il s'agit d'observer la rectification de l'instrument. On ne pourra donc pas l'obtenir pendant la nuit; mais il ne faudra

Digitized by Google

jamais négliger de l'observer pendant le jour, avant de mesurer les angles, ou immédiatement apres.

Observation de la hauteur du soleil, ou d'un autre astre.

328. La hauteur d'un astre est l'arc du vertical compris entre cet astre et l'horison visuel ; or, comme les verticaux sont perpendiculaires à ce dernier cercle, il s'ensuit que l'arc du vertical est le plus court de tous les arcs de grand cercle que l'on puisse mener d'un astre à l'horison. Si l'on veut obtenir la hauteur d'un astre quelconque, il faudra donc mesurer sa distance au point de l'horison qui en est le plus proche. Voici comment on y parvient. Je suppose qu'on ne connaisse pas à-peu-près la hauteur de l'astre que l'on veut observer ; dans ce cas (*fig.* 4 *et* 6), on placera l'alidade sur le point zéro de la graduation, ensuite on regardera (*art.* 314) cet astre directement avec la lunette ou le tuyau *O* ; alors si l'on fait mouvoir l'alidade de *B* en *D* conservant l'image réfléchie dans le champ de la lunette, on rapprochera cette image de l'horison, et enfin on finira par la voir, ainsi que l'horison dans le champ de la lunette. S'il s'agit d'observer la hauteur du soleil, avant de le regarder directement, on placera entre l'œil et le soleil un des verres obscurs qui sont derrière le petit miroir, et on ôtera ce verre dès qu'on aura détaché l'image réfléchie de l'image directe, afin de pouvoir rapprocher l'image réfléchie de l'horison. Dans le cas où l'on saurait quelle doit être à-peu-près la hauteur de l'astre, on placerait l'alidade sur cette hauteur approchée ; alors, en tenant l'instrument dans le plan du vertical de l'astre et regardant l'horison, on verrait en même tems l'astre et l'horison dans le champ de la lunette. Si l'astre ne paraissait pas d'abord, il serait

Digitized by Google

facile de le faire paraître en donnant un léger mouvement à l'alidade, pour la faire alternativement avancer et rétrograder. Dès que l'on voit l'astre et l'horison à une petite distance l'un de l'autre, il faut serrer la vis de pression de l'alidade; ensuite, en balançant l'instrument sur l'axe de la lunette, on fera décrire à l'image réfléchie, au-dessous de l'horison, si l'on observe avec une lunette qui renverse les objets, et au-dessus si l'on observe sans lunette, un arc qui aura sa convexité du côté de l'horison. Si l'on fait mouvoir la vis de rappel, et que l'on rapproche le soleil de l'horison, jusqu'à ce que, dans les balancemens, l'un de ses bords ne touche l'horison qu'en un seul point, on sera certain que l'arc marqué par l'alidade sur la graduation, sera la plus courte distance du bord que l'on aura observé à l'horison, et par conséquent sa hauteur. On mesure ordinairement la hauteur du bord inférieur du soleil; ainsi on doit le voir dans la lunette, ou dans le tuyau, comme si on le regardait directement par un tems chargé de vapeurs, avec l'un ou l'autre de ces instrumens, à l'instant de son lever ou de son coucher.

329. Lorsqu'on navigue près d'une côte, il peut arriver que la partie de l'horison visuel qui est au-dessous de l'astre, soit bornée par la terre; alors il est impossible de s'en procurer directement la hauteur. On peut cependant remédier à cet inconvénient toutes les fois que le soleil n'a pas moins de 57° à 60° d'élévation. En effet, le vertical d'un astre est un grand cercle qui est coupé par l'horison en deux parties égales de 180° chacune; ainsi, la portion de ce cercle comprise entre le soleil et la partie de l'horison opposée à cet astre, est égale au supplément de la hauteur : il faudra donc mesurer ce supplément, lequel n'est autre chose que la

Digitized by Google

distance du soleil à la partie de l'horison qui en est la plus éloignée. Toutes les fois que la hauteur du soleil sera de plus de 57° à 60°, cette distance sera au-dessous de 123° à 120°, et il sera possible de se la procurer avec un sextant. L'observation se fera de la même manière que celle de la hauteur. Il est cependant essentiel de faire remarquer que l'arc décrit alors par l'image réfléchie du soleil, dans les balancemens que l'on donnera à l'instrument, aura sa convexité du côté du zénith au lieu de l'avoir du côté de l'horison, comme dans le cas précédent : il faudra donc placer l'image réfléchie sur la surface de la mer, ou la plonger ; ensuite on mettra en contact avec l'horison, le bord qui en paraît le plus proche, mais qui effectivement en est le plus éloigné.

330. Toutes les fois que la hauteur d'un astre est moindre que 90°, l'arc décrit par l'image réfléchie a sa convexité du côté de l'horison. Lorsqu'on observe le supplément de la hauteur, alors l'angle mesuré est plus grand que 90°, et l'arc décrit par l'image réfléchie a sa convexité du côté du zénith. Si l'astre dont on veut avoir la hauteur se trouvait au zénith, comme tous les points de l'horison en seraient également éloignés, en balançant l'instrument, l'image réfléchie suivrait exactement le cercle de l'horison, et ne s'en détacherait pas un seul instant : l'observation de la hauteur serait impossible. En général, plus la hauteur d'un astre approche de 90°, moins la courbure de l'arc, soit concave, soit convexe, que décrit l'image réfléchie, dans les balancemens de l'instrument, diffère de la courbure de l'horison visuel. La différence de courbure de ces deux arcs ne commence à devenir très-sensible que lorsque l'astre a moins de 88° de hauteur : c'est ce qui rend la mesure des hauteurs si incertaine, et, par conséquent, les latitudes

Digitized by Google

observées si défectueuses, quand le soleil
ridien très-près du zénith.

331. Il peut être souvent avantageux d'
teur de la lune; cette observation, pend
fait sans le secours de verres colorés, et
difficulté : on pourra même la mesurer
précision que la hauteur du soleil. Mais
voit ordinairement que la moitié du disqu
il faudra prendre, dans tous les cas, la h
éclairé, qui sera quelquefois le bord supéri
fois le bord inférieur. Lorsqu'on prendra
bord inférieur, l'observation doit se fair
du soleil, c'est-à-dire, que l'on fera dé
de l'horison, à l'image réfléchie de la lun
que son bord inférieur ne le touche qu
Dans le cas où l'on observerait la hauteu
périeur, il faudrait placer ou plonger en
réfléchie de la lune sur la surface de la n
dans les balancemens, le bord supérieur s
tivement de la mer et s'en rapprochera; n
chera l'horison qu'en un seul point, lor
marquera la hauteur de ce bord, et que
sera dans le plan du vertical.

Si l'observation de la hauteur de la lun
dant la nuit, il faudra affaiblir sa lumiè
des verres colorés, et avoir égard à ce qu
dit relativement au bord que l'on doit m
tact avec l'horison. Mais la plus grande ca
tude provient alors de la difficulté de bien
qui termine l'horison. Le moment qui p
avantageux est celui où la lune n'est pas t
où ses reflets font briller la surface de l
lumière argentée, qui fait paraître distinctem

Digitized by Google

où l'horison se termine ; encore, dans ce cas, faut-il faire usage des hauteurs observées avec une grande circonspection, parce que si, par hasard, un nuage vient sans qu'on s'en apperçoive, obombrer la partie la plus éloignée de la mer, on fait coïncider l'image réfléchie avec l'extrémité des reflets de la lune, au lieu de la mettre en contact avec l'horison. L'erreur qu'un pareil accident peut occasionner sur la hauteur de la lune, peut être très-considérable ; elle est d'autant plus dangereuse que rien ne peut indiquer qu'elle a eu lieu : dans tous les autres cas, il sera possible de juger de l'exactitude d'une hauteur de la lune d'après la facilité que l'on aura eue à faire l'observation ; on ne pourra cependant guère se flatter de pouvoir l'obtenir à moins de deux ou trois minutes près dans les circonstances les plus favorables.

332. Il est à regretter que l'on éprouve encore plus de difficulté à observer les hauteurs d'étoiles que celles de la lune, et que l'on soit privé, par cette raison, de l'avantage inappréciable de se procurer la position du vaisseau, tant en latitude qu'en longitude, à presque tous les instans de la nuit. Le plus grand obstacle que l'on éprouve, vient de ce qu'alors l'horison visuel ne paraît jamais assez bien tranché. En premier lieu, il ne le paraît jamais mieux que lorsque les reflets de la lune font briller la surface de la mer ; mais alors il est impossible de prendre la hauteur d'une étoile qui se trouve au-dessus de la partie éclairée ; car l'éclat de cette lumière est si vif, qu'il éteint celle de l'étoile et la fait entièrement disparaître. La circonstance qui semblerait la plus avantageuse, est celle où le tems étant serein, la lune éclaire la concavité du ciel ; alors l'horison paraît bien tranché, lorsqu'on le regarde à la vue

Digitized by Google

simple. Il l'est également bien lorsqu'on l
la lunette ; mais dès que l'on a ramené l'i
de l'étoile sur la surface du petit miroir,
cette image produit dans l'œil une sensati
pour détruire l'impression causée par l
viennent de l'horison, et ce dernier s'obsc
de ne pas paraître beaucoup mieux termin
nuits sombres. On peut affaiblir la lumiè
au moyen d'un verre coloré d'une teinte
gère. On pourrait peut-être aussi employer
un petit miroir très-mince, afin que l'horiso
le moins possible de sa clarté ; mais malgré t
tions, je doute que l'on puisse répondre
d'une étoile à moins de 5′ près. Au res
songe à l'utilité dont seroient ces sortes d
on ne peut s'empêcher d'engager les m
abandonner qu'après s'être convaincus,
nombre d'expériences, qu'il leur est impossi
D'ailleurs, la faculté de faire cette observ
pendre de la qualité de l'organe de chaque
et peut-être sera-t-il possible à quelques-u
auront pris la peine d'exercer leur vue,
prendre des hauteurs d'étoiles avec une p
sante pour la sûreté de la navigation.

333. L'on doit obtenir la hauteur du s
d'une minute près, lorsque l'atmosphère n'e
au point d'obscurcir l'horison, ou bien d
voir le disque du soleil.

Lorsque l'on prend la hauteur d'un astr
la lunette ou le tuyau soit éloigné du pla
ment, et que l'on ne puisse voir entre les
cune partie de la moitié étamée du petit

Digitized by Google

Observations des distances.

334. On vient de voir que l'observation de la hauteur d'un astre n'est réellement que la mesure de sa distance au point le plus proche de l'horison ; ainsi, dès que l'on sera en état d'observer les hauteurs, il sera bien facile de mesurer la distance de deux astres quelconques. Cependant, les distances de la lune au soleil et aux étoiles, qui ont la propriété de procurer la longitude du point où s'est faite l'observation, sont d'une utilité si généralement reconnue, qu'elles méritent de fixer particulièrement l'attention.

Ces dernières observations exigent une très-grande précision, et il ne faudra négliger aucune des attentions qui peuvent contribuer à la leur donner. On vérifiera donc si les miroirs sont perpendiculaires au plan de l'instrument, et l'on répétera la rectification du point de leur parallélisme, immédiatement avant l'observation des distances du soleil à la lune, ou immédiatement après. Lorsqu'on voudra observer des distances de la lune aux étoiles, comme les vérifications ne peuvent être faites pendant la nuit, il faudra s'en occuper dans la soirée qui doit précéder les observations, ou dans la matinée suivante ; et même pour plus grande sûreté, il faudra les faire le soir, et les répéter le lendemain matin.

335. La lunette doit être éloignée du plan de l'instrument, et les fils doivent être placés parallèlement à ce plan. On cherchera d'abord dans la Connaissance des tems, quelle doit être à-peu-près la distance des deux astres que l'on veut observer, et l'on placera l'alidade du sextant sur cette distance approchée ; ensuite on

Digitized by Google

regardera directement, celui de ces deux astres dont la lumière est la plus faible, et, en le conservant dans le champ de la lunette, on placera le plan de l'instrument dans celui des rayons visuels des deux astres : dès qu'il s'y trouvera, l'image réfléchie de l'astre le plus lumineux paraîtra entre les deux fils de la lunette, et à une petite distance de l'image de l'astre que l'on regarde directement. Alors, on fixera l'alidade avec la vis de pression, et en balançant l'instrument sur le rayon visuel de l'astre vu directement, on fera passer et repasser l'image réfléchie devant l'image directe. Si, pendant ces balancemens, on fait mouvoir la vis de rappel, jusqu'à ce que les disques des deux astres se touchent en un seul point, l'arc marqué par l'alidade sera la distance de ces mêmes astres. Lorsque l'on observe des distances de la lune au soleil, les disques paraissent si bien terminés, que l'on peut répondre des distances à dix ou quinze secondes près. Si l'on observe des distances de la lune aux étoiles, quoique le disque de la lune paraisse moins bien terminé, après avoir traversé un verre coloré, que celui du soleil, on pourra cependant obtenir la distance avec une assez grande précision, et en répondre à vingt secondes près.

336. Il est essentiel de rappeler ici, que l'on doit avoir la plus grande attention de conserver les deux astres au milieu des fils placés au foyer de l'oculaire, afin de faire le contact dans le plan qui passe par l'axe de la lunette, et qui est parallèle au plan de l'instrument. Cette méthode est plus facile dans la pratique, que celle qui se trouve dans presque tous les livres de navigation, où l'on prescrit de remarquer à quelle distance de l'un ou de l'autre fil on a observé le contact ; afin de

Digitized by Google

conclure de cette estime grossière, la quantité dont le plan dans lequel il a eu lieu, dévie du plan qui est parallèle à celui de l'instrument. Cette quantité, qu'on nomme déviation, servait à trouver, au moyen d'une petite table destinée à cet objet, la correction de l'angle observé. Soit *AB*, *CD* (*fig.* 9) les deux fils de la lunette; *EF* est la ligne qui passe par l'axe, et détermine le plan parallèle à celui de l'instrument. On connaît la distance angulaire des fils *AB*, *CD*, qui est ordinairement de trois diamètres du soleil, ou de 1°.36′, et au plus de 2°. Il s'agissait, dans l'ancienne méthode, de juger si le contact avait eu lieu au quart, au tiers ou à la moitié de l'intervalle qui sépare les fils, et d'en conclure la distance angulaire qui existait entre le point où il s'était opéré et la ligne *EF*. L'expérience a prouvé que, lorsqu'on ne cherche pas à rapporter les deux astres à un point fixe, ils ont, dans le champ de la lunette, une extrême mobilité; dès lors, on pouvait facilement se tromper dans l'estime que l'on faisait de l'endroit où le contact avait eu lieu, du tiers ou du quart de la distance de la ligne *EF*, à l'un ou à l'autre des deux fils *AB*, *CD*, c'est-à-dire, du sixième ou du huitième de la distance qui les sépare, ou de 20′ à 15′. Or, si l'on contracte l'habitude de conserver l'astre vu directement au milieu des fils, il ne s'écartera jamais de la ligne *EF* de plus du tiers ou du quart de sa distance à l'un de ces fils, c'est-à-dire, comme précédemment, de 20′ à 15′. L'observation sera donc susceptible de la même précision; mais cette méthode aura l'avantage d'épargner des corrections et de simplifier le calcul. En général, les angles observés ne seront pas en erreur de plus de 12″ dans les cas les plus défavorables, c'est-à-dire, quand la distance sera de 120°; car lorsqu'elle sera de 90°, la plus grande

Digitized by Google

erreur ne pourra pas être de plus de 6″ ; de 90°, elle sera encore moindre.

337. Il arrive souvent que l'on prend soleil à un objet terrestre, afin d'obtenir astronomique de cet objet. Les observa espèce n'exigent pas autant de précision distances de la lune au soleil ; ainsi, on avec une lunette ou sans lunette : on au les cas, la certitude d'obtenir la distance près. Cette exactitude est plus que suff s'agit d'un relèvement astronomique.

338. Si l'on veut mesurer la distance ang objets terrestres, il faut rapprocher la lune du plan de l'instrument, exactement comm lait observer la rectification de l'instrume mettra les bords des deux objets en cont des fils, et à l'endroit où ils paraissent é également éclairés. La même observation sans lunette, mais alors il faut mettre l en contact sur la ligne qui sépare la par petit miroir de celle qui ne l'est pas. I l'on serait obligé d'observer un certain n tances en très-peu de tems, il vaudrait se servir de lunette, parce qu'on serait à prendre un objet pour un autre, et des méprises dont l'inconvénient serait, sar beaucoup plus grand, que celui d'une e deux minutes, dont alors la mesure de l deviendrait susceptible.

Digitized by Google

CHAPITRE XXII.

Du Cercle à réflexion.

339. Le savant *Borda* qui, par ses travaux, a tant contribué aux progrès de la navigation, est celui auquel nous devons le plus parfait de tous les instrumens à réflexion. Il n'avait d'abord eu en vue que de perfectionner le cercle de *Tobie Mayer*, professeur de Goëttingen; mais les changemens qu'il y a faits lui ont donné de si grands avantages, que l'on peut regarder ce savant officier comme l'inventeur du cercle à réflexion dont on se sert à présent. A ce titre, il mérite la reconnaissance des marins de toutes les nations, et les hommages que l'on n'accorde qu'aux hommes de génie, qui, par leurs découvertes, ont fait faire des progrès aux sciences.

Le cercle à réflexion (*fig.* 10, 11 et 12) est composé d'un cercle entier; mais comme il est destiné à donner la mesure des angles que les rayons réfléchis par un miroir forment entre eux, les demi-degrés doivent être comptés pour des degrés, et ce cercle est divisé en 720 parties au lieu de 360. Le grand miroir *LG* est placé au centre de l'instrument, et tourne sur ce centre à l'aide de l'alidade *CB*. Le petit miroir *IF*, au lieu d'être dans une position fixe comme dans le sextant, est placé à l'extrémité d'une seconde alidade *OP*, mobile autour du centre de l'instrument, et qui porte, à l'autre extrémité, la lunette *O*. La position de la lunette *O*,

Digitized by Google

ne peut donc pas varier, par rapport au petit miroir; mais si l'on fait mouvoir l'alidade *OP*, le petit miroir change de position, par rapport au grand miroir, et prend, à l'égard de ce miroir, différens degrés d'inclinaison. Supposons que l'alidade *BC*, que j'appelle alidade du grand miroir, soit sur le point zéro de la graduation, et que la seconde alidade *PO*, qui est l'alidade du petit miroir, soit fixée, au moyen d'une vis de pression, dans une position telle que les deux miroirs se trouvent parallèles : alors si l'on fait mouvoir l'alidade du grand miroir de *B* en *D*, et que l'on fasse coïncider un objet vu directement par la lunette *O*, avec l'image d'un autre objet réfléchi par le grand miroir, il est évident que le double de l'arc *BD*, ou le nombre de degrés et de minutes marqués par l'alidade dans la position *CD*, sera la distance angulaire des deux objets que l'on aura mis en contact. Cette manière d'observer avec un cercle à réflexion, ne diffère pas de celle que l'on emploie lorsqu'on observe avec un sextant. Les angles mesurés doivent donc être affectés de l'erreur que l'on peut commettre dans l'observation du point de la graduation où répond l'alidade, lorsque les deux miroirs sont parallèles.

340. Ce qui vient d'être dit dérive du principe fondamental de la construction de tous les instrumens à réflexion, que les angles formés par les rayons visuels de deux objets que l'on a mis en contact, sont égaux au double de l'angle *BCD* parcouru par l'alidade. Mais lorsque l'alidade était en *B*, les miroirs étaient parallèles; donc les angles formés par les rayons visuels de deux objets que l'on a mis en contact, ont aussi pour mesure le double de l'angle d'inclinaison des surfaces des deux miroirs : ainsi, toutes les fois que ces surfaces feront entre elles un angle égal à *BCD*, les mêmes

Digitized by Google

objets se trouveront encore en contact dans le champ de la lunette. On peut tirer de cette remarque une seconde manière d'observer les angles simples avec le cercle à réflexion ; ce sera de faire mouvoir l'alidade *OP*, du petit miroir, au lieu de l'alidade *CB*, du grand. En effet, si l'alidade *CB* étant sur zéro, et les surfaces des miroirs parallèles, on avance, dans le sens de la graduation, l'alidade du petit miroir de *P* en *P'* (*fig.* 12), et qu'on lui fasse parcourir un arc *PP'*, égal à l'arc *BD* de la *fig.* 11, que l'on avait précédemment fait parcourir à l'alidade du grand miroir, l'angle formé par les surfaces des deux miroirs, sera le même dans ce dernier cas que dans l'autre, avec cette différence qu'après avoir fait mouvoir l'alidade du petit miroir, cet angle, au lieu d'être ouvert du côté de l'arc *PBD* (*fig.* 11), sera ouvert du côté opposé *O'PP'* (*fig.* 12) ; il faudra donc que les rayons directs de l'astre ou de l'objet dont on observe l'image réfléchie, au lieu de venir frapper le grand miroir du côté de l'arc *PBD* (*fig.* 11), viennent du côté *O'PP'* (*fig.* 12), et passent entre le petit miroir et l'objectif de la lunette, avant d'arriver au grand miroir. Le moyen de remplir cette condition, est de faire faire à l'instrument une demi-révolution, en le faisant tourner sur l'axe *PO* de la lunette. Dans cette seconde position, la face qui, dans la première, était tournée du côté de la main gauche, sera tournée du côté de la main droite, et les parties de l'instrument qui étoient les plus élevées, seront devenues les plus basses : celles qui étaient les plus basses seront, par conséquent, les plus élevées. Pour avoir la distance angulaire des objets que l'on a mis en contact par cette seconde manière d'observer, il faut retrancher le nombre de degrés et minutes que marquait l'alidade, lorsque les miroirs étaient parallèles,

Digitized by Google

du nombre de degrés et de minutes auxquels cette alidade répond, à la fin de l'observation.

341. Jusqu'à présent, les observations que l'on vient d'indiquer n'ont aucun avantage sur celles que l'on peut faire avec un sextant ; au contraire, le rayon d'un cercle étant ordinairement plus petit que celui d'un sextant, les angles simples mesurés avec ce dernier instrument, seront susceptibles d'une plus grande précision que ceux qui auraient été mesurés avec un cercle. Mais si l'on observe des angles multiples, et que l'on combine ensemble les deux manières d'observer qui viennent d'être décrites, c'est à-dire, si l'on fait mouvoir alternativement les deux alidades, et si les rayons directs de l'astre dont on observe l'image réfléchie, viennent frapper le grand miroir, en passant alternativement entre l'objectif de la lunette et le petit miroir, ou du côté opposé ; alors le cercle à réflexion reprend sur le sextant de tels avantages, qu'il est probable que ce dernier instrument finira par être entièrement abandonné.

Je suppose qu'il s'agisse d'observer la distance de deux objets quelconques, et qu'après avoir placé l'alidade du grand miroir, sur le point zéro de la graduation, on fasse mouvoir l'alidade du petit miroir, pour faire coïncider dans le champ de la lunette, l'image directe de l'un des objets avec l'image réfléchie de l'autre. Si après avoir achevé cette observation, on regarde l'alidade du petit miroir comme fixe et que l'on fasse avancer, à son tour, l'alidade du grand miroir d'un arc *BD* (*fig.* 12), égal à l'arc *PP'* qui a été parcouru par l'alidade du petit miroir ; il est évident que, lorsque cette alidade sera dans la position *CD*, les surfaces des deux miroirs seront parallèles. Supposons qu'on fasse encore avancer l'alidade du

Digitized by Google

grand miroir, de la quantité *DE*, égale *BD*, elle aura réellement parcouru un arc dont le nombre de degrés marqués sur la graduation sera double de l'angle observé; mais l'angle que les surfaces des deux miroirs feront alors entre elles, sera le même que celui dont elles étaient réciproquement inclinées, à la fin de la première observation: cet angle au lieu d'être ouvert du côté *O'PP'*, le sera du côté opposé, ou du côté *PBD*. Il faudra donc pour retrouver les objets en contact dans le champ de la lunette, faire faire une demi-révolution à l'instrument sur l'axe de cette même lunette; afin que les rayons directs de l'astre dont on observe l'image réfléchie, viennent frapper le grand miroir, en passant du côté *PBD*. Il est à remarquer que l'on n'a pas besoin de connaître le point *D*, où répond l'alidade, lorsque les miroirs sont parallèles; en mettant les deux objets en contact, on obtient directement l'arc *BE*, qui est double de la distance angulaire que l'on a observée. L'angle mesuré ne sera donc pas affecté de l'erreur que l'on peut commettre sur le point de parallélisme des deux miroirs, laquelle peut être, ainsi que nous l'avons déja dit (*art.* 326), d'un quart ou d'un tiers de minute, c'est-à-dire de 15″ à 20″. Mais un autre avantage est que l'erreur du point de la graduation où répond l'alidade du grand miroir, n'influe en totalité que sur le double de l'angle observé; par conséquent l'erreur de l'angle simple ne sera que la moitié de celle de la graduation.

Dès que la seconde observation est terminée, on peut en commencer une troisième, et faire parcourir à l'alidade du petit miroir un arc double de l'angle observé: alors on mettra les deux objets en contact. A la quatrième observation, on fera mouvoir l'alidade du grand miroir de la même quantité; et lorsqu'on aura fait coïncider

Digitized by Google

les objets, l'arc marqué par cette alidade
druple de l'angle observé. Les observati
angle peuvent être répétées un plus gran
fois; à la fin de la sixième observation, par
marqué par l'alidade du grand miroir, se
de l'angle observé : à la fin de la huitièm
tiendra huit fois et ainsi de suite. En gé
observé sera égal à l'arc parcouru par l'ali
miroir, divisé par le nombre des observa
ne pourra obtenir cet angle qu'à la fin de
vation paire. On vient de voir que l'erreur
graduation, où répond l'alidade après la s
vation, n'influe que de la moitié de sa val
mesuré; elle n'influera que du quart après
vations, et du sixième après six : l'influence
la graduation, ira donc toujours en diminu
que l'on fera un plus grand nombre d'obs
sera possible de les multiplier au point d
peu-près nulle. C'est de cette dernière pr
celle qui rend inutile la connaissance d
graduation où répond l'alidade, lorsque l
parallèles, que dérivent les principaux avant
de *Borda*, sur les autres instrumens à réfl
que c'est uniquement dans la disposition
parties qui le composent, que son auteu
remèdes aux imperfections que l'on ne peu
construction, et à la faiblesse de nos organe
rait trop admirer comment par une simple c
l'esprit, il est parvenu à donner, aux a
avec le cercle, un degré de précision a
habiles et les plus célèbres ouvriers, n'ava
atteindre dans la construction des plus gran

Digitized by Google

Vérification de la position des miroirs et de l'axe de la lunette, par rapport au plan de l'instrument.

342. Il faudra s'assurer si le grand et le petit miroir sont perpendiculaires au plan de l'instrument. Ces deux vérifications se feront absolument de la même manière que celles de la perpendicularité des miroirs d'un sextant; on trouvera aux articles 318 et 319, des détails très-circonstanciés sur les moyens de les effectuer. En général, comme il y a plusieurs vérifications qui sont communes aux deux instrumens, il sera nécessaire, avant de lire l'article qui concerne chacune des vérifications du cercle, d'avoir recours à ce qui a été dit sur le même sujet, en parlant du sextant.

343. La lunette *O* du cercle est fixée sur l'alidade du petit miroir, et est tenue aux montans *R* et *V* par des oreilles pratiquées aux deux extrémités du corps de la lunette, et qui entrent dans les rainures des montans. Chaque montant porte une vis de rappel, destinée à rapprocher ou à éloigner la lunette du plan de l'instrument, suivant que l'on veut voir, dans le champ de cette lunette, une plus ou moins grande partie de la moitié étamée du petit miroir. Les montans *R* et *V* portent aussi des divisions, entièrement semblables, qui servent à placer l'axe de la lunette dans une situation parallèle au plan de l'instrument. Il a été dit plus haut que le parallélisme de l'axe de la lunette d'un sextant, au plan de l'instrument, dépend de l'ouvrier qui le construit : mais la lunette du cercle pouvant prendre différens degrés d'inclinaison, au moyen des vis de rappel placées à ses extrémités; il est nécessaire de connaître le point de la division de chaque montant auquel

Digitized by Google

les lignes de foi des rappels doivent répond
l'axe de la lunette soit parallèle au plan de
Voici comment on y parvient. D'abord il
cercle à plat sur une table, et placer les fils
parallèlement au plan de l'instrument. Ensu
sur le limbe et à deux points presque di
opposés, les deux viseurs de la figure 7. O
trument de manière à voir un objet bien disti
au moins de 12 à 20 pieds, dans la ligne qui
partie supérieure des viseurs ; enfin on plac
sur les points zéro de la division de chaque
l'on fera mouvoir l'alidade du petit miroir j
l'on apperçoive le même objet dans le ch
nette. S'il paraît exactement au milieu des
une preuve que l'axe est parallèle au plan de
alors dans toutes les observations, on aura
placer les lignes de foi des rappels de chac
sur les points de division correspondans
nombre de parties. Dans le cas où en faisant
dade du petit miroir, l'objet ne paraîtrait
des fils, il sera facile de l'y ramener, en fa
la vis de rappel la plus proche du limbe ;
gardera le point de division auquel répond
de ce rappel. Je suppose qu'elle soit à un o
au-dessus de la ligne de foi du rappel qui est
du centre de l'instrument, il faudra que
observations, la ligne de foi du rappel le p
limbe, soit d'un ou deux degrés au-dessu
rappel qui est voisin du centre de l'instr
même ligne de foi avait été un ou deux deg
de l'autre, il faudrait qu'elle fût dans toute
tions de un ou deux degrés plus bas.

Lorsque l'axe de la lunette a été placé

Digitized by Google

parallèle à celui de l'instrument, l'observation doit se faire avec un cercle exactement de la même manière qu'elle se fait avec un sextant. (*Voyez art.* 321.)

Vérification du parallélisme des surfaces du grand miroir.

344. *Borda*, dans l'ouvrage intitulé *Description et usage du cercle à réflexion*, a donné des tables à l'aide desquelles, il est possible de corriger les erreurs provenant du défaut de parallélisme des surfaces du grand miroir. Mais comme ces tables ne peuvent servir que pour des instrumens qui, à certains égards, auraient été construits d'après les mêmes principes et sur le même plan, elles ne peuvent être d'aucune utilité, lorsqu'on a mesuré les angles avec un sextant; nous nous sommes contentés, par cette raison, de l'indiquer en parlant de cet instrument. C'est ici le lieu de faire connaître les opérations préliminaires qui doivent être faites avant de pouvoir s'en servir.

Après s'être assuré que les deux miroirs sont perpendiculaires au plan de l'instrument, et que l'axe de la lunette lui est parallèle; on choisira deux objets terrestres très-éloignés, dont les bords cependant soient bien tranchés, et dont la distance angulaire ne soit pas moindre que de 120°. On mesurera cette distance par un grand nombre d'observations; aussitôt que ces observations seront terminées, il faudra ôter le grand miroir de la boîte qui le renferme, et l'y placer de nouveau, de manière que le bord de ce miroir qui, dans la première position, était le plus près de la lunette, en soit dans la seconde position le plus éloigné. Ensuite on placera ce même miroir perpendiculairement au plan de l'instrument, et l'on observera, une seconde fois, la distance des mêmes objets en

Digitized by Google

ayant l'attention de faire le même nombre d'observations que la première fois. Si les deux distances mesurées sont égales, ce sera la preuve que les deux surfaces du grand miroir sont parallèles; et, alors les angles observés n'auront besoin d'aucune correction. Mais si ces deux distances diffèrent entre elles, le grand miroir sera prismatique, et la moitié de leur somme sera dégagée de toute erreur. Il suit de là que la moitié de leur différence sera l'erreur des angles observés. Cette erreur devra être ajoutée aux angles mesurés dans la première position du miroir, si l'angle mesuré dans la seconde position avait été plus grand; elle devrait être retranchée, si l'angle mesuré dans la seconde position avait été plus petit.

Les nombres de la table intitulée, *Erreurs provenant de l'inclinaison des surfaces du grand miroir, quand cette inclinaison est de* 1′, donnent le moyen de calculer par une simple règle de proportion, l'erreur des distances observées, quelle que soit l'inclinaison des surfaces du grand miroir. On fera cette proportion, l'erreur de la table, qui correspond à la distance que l'on a observée pour vérifier l'instrument, est à l'erreur que la même table indique pour tout autre angle, par exemple pour celui de 90°, comme l'erreur trouvée par la vérification est à un quatrième terme, qui sera l'erreur occasionnée par le grand miroir lorsqu'on a mesuré un angle de 90°.

Toutes les fois que l'on répète les observations, avec un cercle, les rayons directs de l'objet vu par réflexion, viennent frapper la surface du grand miroir, alternativement du côté *PBD* (*fig.* 12) et du côté *O′PP′*, l'angle d'incidence sera tantôt du côté du sommet de l'angle que les deux surfaces de ce miroir font entre elles, et tantôt du côté opposé. Les erreurs des angles observés, auront

Digitized by Google

donc lieu en sens contraires ; mais elles seront plus grandes, lorsque les rayons de l'objet vu par réflexion viendront au grand miroir du côté *PBD*, que lorsque ces mêmes rayons passeront entre le petit miroir et l'objectif de la lunette, parce qu'ils y parviendront plus obliquement dans le premier cas que dans le second. A la fin de chaque observation paire, l'erreur après que l'on aura pris la moitié, le quart ou le sixième des angles observés, sera égale à la moitié de la différence de ces deux erreurs.

On doit remarquer que les observations faites, lorsque les rayons directs de l'objet vu par réflexion viennent du côté *PBD*, sont les mêmes que celles qui auraient été faites avec un sextant. Les erreurs provenant du défaut de parallélisme des surfaces du grand miroir, seront donc moindres avec le cercle qu'avec un sextant. On vient de dire que ces mêmes erreurs, étaient plus petites quand les rayons directs de l'objet vu par réflexion, viennent frapper le grand miroir en passant entre le petit miroir et l'objectif de la lunette ; on peut donc regarder comme une règle générale, que si l'on veut observer un angle simple, il faut fixer l'alidade du grand miroir sur le point zéro de la graduation, et faire mouvoir l'alidade du petit dans le sens de cette même graduation.

Des verres colorés et du parallélisme de leurs surfaces.

345. Les verres colorés du cercle à réflexion, *fig.* 13, sont détachés du corps de l'instrument ; on les place en *H*, *fig.* 10, dans une loge destinée à les recevoir, quand on veut affaiblir la lumière de l'astre vu par réflexion, et on les place en *K* pour affaiblir la lumière de l'astre que l'on regarde directement. Il est nécessaire que les

Digitized by Google

deux surfaces de ces verres soient exactement parallèles, pour qu'ils n'occasionnent aucune erreur sur la mesure des angles simples ; cependant si elles ne l'étaient pas, on cherchera, de la manière suivante, les moyens de corriger les erreurs dont les angles observés pourraient être affectés à cause de cette imperfection.

On placera l'alidade du grand miroir sur le point zéro de la graduation, et celle du petit sur celui où les deux miroirs sont parallèles. On mettra un verre coloré dans la loge *H*, et un autre dans la loge *K* ; ensuite il faudra regarder le soleil, et en faisant mouvoir l'alidade du petit miroir, on mettra en contact les bords des images directes et réfléchies. Dès que cette première observation est achevée on retourne le verre de la loge *H* de manière qu'il présente son autre surface au grand miroir ; et si en regardant une seconde fois le soleil, les bords des images directes et réfléchies se trouvent encore en contact, ce sera une preuve que les surfaces du verre coloré sont parallèles : alors les angles simples observés avec ce verre, n'auront besoin d'aucune correction. Mais si les disques des deux images sont éloignés, ou bien s'ils mordent l'un sur l'autre, il faudra tourner la vis de rappel de l'alidade du grand miroir, et les ramener à se toucher une seconde fois. L'arc parcouru par l'alidade sera le double de l'erreur occasionnée par le défaut de parallélisme des surfaces des verres colorés. On pourra répéter la même observation plusieurs fois ; à la quatrième observation l'arc parcouru par l'alidade, sera le quadruple de l'erreur, et à la sixième, il en sera le sextuple. En général, l'erreur du verre coloré, sera égale à l'arc parcouru par l'alidade du grand miroir, divisé par le nombre des observations. La position de la ligne *CN*, ne devant pas varier par rapport au verre coloré, la correction de cette

Digitized by Google

erreur sera la même pour tous les angles observés. Il sera possible de connaître, en opérant ainsi qu'il vient d'être dit, les erreurs de tous les verres semblables à ceux de la figure 13, quand ils sont placés en *H*. Il ne sera pas moins aisé d'obtenir les erreurs de ces mêmes verres, quand ils seront placés en *K*. Le procédé sera le même, excepté que dans l'intervalle des observations, il faudra retourner le verre de la loge *K* au lieu de celui de la loge *H*. La position de la ligne *ONP* est invariable par rapport à la situation du verre coloré placé en *K*, et la correction trouvée devra s'appliquer à tous les angles.

L'avantage que l'on retire, en général, de la multiplication des observations faites avec un cercle, est aussi grand à l'égard des erreurs dont on vient de parler, qu'à l'égard de toutes les autres; car, quelle que puisse être l'inclinaison des surfaces des verres colorés, l'erreur des angles mesurés sera nulle à chaque observation paire. On a déja vu que l'erreur était la même dans toutes les observations, ainsi elle aura la même valeur, soit que les rayons directs de l'objet vu par réflexion, viennent au grand miroir du côté *PBD*, *fig.* 12, ou du côté opposé. Mais, à la seconde observation, l'instrument a été renversé; par conséquent si la réfraction éprouvée par le rayon réfléchi, en traversant le verre coloré, tendait à relever ce rayon à la première observation, la même réfraction doit tendre à l'abaisser de la même quantité à la seconde. Dès-lors la moitié de l'angle double ou le quart de l'angle quadruple et ainsi de suite, sera dégagé de toute erreur.

346. Il est à regretter que l'on ne puisse pas se servir des verres de la figure 13, dans toutes les circonstances. En effet, si par le milieu *C* du grand miroir et les

Digitized by Google

bords *SS* de la monture d'un de ces verres, on tire les lignes *CM* et *CY*, toutes les fois que les rayons directs de l'astre vu par réflexion, se trouveront dans l'espace angulaire *MCY*, ils rencontrent avant de parvenir au grand miroir, ou le verre coloré ou sa monture, et l'observation sera imparfaite. Dans les cercles construits d'après les dimensions fixées par *Borda*, l'angle *MCY* doit être de 28° 40′. Si l'on tire la ligne *CX* parallèle à l'axe de la lunette, l'angle *YCX* est de 5° 20′. Il s'ensuit que dans le cas où les rayons directs de l'objet vu par réflexion, passent entre le petit miroir et l'objectif de la lunette, il est impossible de se servir des verres de la figure 13, toutes les fois que l'angle observé est entre 5°.20′ et 34°. On est obligé alors, d'employer les verres de la figure 14, que l'on place devant le grand miroir dans les loges *q*, *q*. Mais ces verres peuvent occasionner d'assez grandes erreurs. D'abord ils sont traversés une première fois par les rayons qui viennent frapper le grand miroir, et ils le sont une seconde par les rayons réfléchis ; les rayons de l'astre vu par réflexion, éprouvent donc une double réfraction. Ensuite les erreurs provenant du défaut de parallélisme de leurs surfaces varient à chaque angle observé, parce que les angles que les rayons directs et réfléchis font avec ces surfaces, ne sont pas les mêmes. Il ne faudra donc se servir des verres de la figure 14, que pour observer des hauteurs entre 5°.20′ et 34°. Au reste, l'obliquité des rayons de l'astre vu par réflexion ne sera pas très-grande quand les angles seront au-dessous de 34°, et les erreurs occasionnées par les défauts de cette espèce de verres, seront moins considérables dans les circonstances où l'on est forcé de s'en servir que dans toutes les autres. Les distances de la lune au soleil, sont toujours plus grandes

Digitized by Google

que 40°, et les distances de la lune aux étoiles sont si rarement au-dessous de 34°, que l'on pourrait, sans inconvénient, recommander de ne jamais se servir des verres colorés qui se placent devant le grand miroir, dans l'observation des distances.

Point de parallélisme des deux miroirs.

347. Lorsqu'on veut mesurer des angles simples avec le cercle à réflexion, il est nécessaire de connaître le point de la division où répond l'alidade du petit miroir, lorsque les surfaces des deux miroirs sont parallèles; en supposant toutefois que l'alidade du grand a été préalablement mise sur zéro. C'est ce que j'appelle point de parallélisme des deux miroirs. L'observation qui sert à le trouver est la même que celle qui fait connaître la rectification du sextant; et l'on se dispensera de répéter ici ce qui a déja été dit aux art. 326 et 327. Cependant, toutes les fois qu'il est dit en parlant du sextant, que l'on doit prendre la moitié de la différence des deux arcs observés pour avoir la rectification de l'instrument, ou le point de parallélisme des deux miroirs; il faudra toujours, lorsque l'observation aura été faite avec un cercle, y substituer la règle de prendre la moitié de la somme des deux arcs auxquels l'alidade du petit miroir répondait à la fin de chaque observation. La raison en est bien simple et vient de ce que l'alidade du petit miroir se trouve dans une partie du limbe où la division est continue.

Digitized by Google

Observations des hauteurs des astres et des distances de la lune au soleil ou aux étoiles.

348. L'observation de la hauteur simple d'un astre quelconque, se fait avec un cercle de la même manière qu'avec un sextant. (*Voy. art.* 328 *et suiv.*) On fixe d'abord l'alidade du grand miroir sur le point zéro de la graduation ; ensuite après avoir placé l'alidade du petit miroir sur le point de parallélisme des deux miroirs, on regarde directement dans la lunette l'astre dont on veut observer la hauteur. S'il s'agit du soleil on placera un verre coloré derrière le petit miroir. Ensuite on abaissera l'image réfléchie en la conservant dans le champ de la lunette, et enfin, après avoir retiré le second verre coloré, on la mettra en contact avec l'horison. L'arc marqué par l'alidade, moins celui où elle doit répondre lorsque les miroirs sont parallèles, est égal à la hauteur observée. On pourrait encore fixer l'alidade du petit miroir sur le point de parallélisme, et faire mouvoir l'alidade du grand miroir ; alors l'arc marqué par cette alidade serait la hauteur observée. On peut voir à la fin de l'art. 344, les raisons qui doivent faire préférer de se servir de l'alidade du petit miroir, et de regarder celle du grand comme étant fixe.

Le cercle à réflexion ne peut jouir de tous ses avantages que, lorsqu'on répète les observations : il ne faudra donc observer des hauteurs simples que dans les cas où il n'est pas possible de faire plusieurs observations de suite ; ainsi qu'il arrive toutes les fois que l'on est obligé d'observer la hauteur d'un astre lorsqu'il est au méridien. Dans tous les autres cas on répétera les observations. Les astres depuis l'instant de leur lever jusqu'à celui de leur

Digitized by Google

passage au méridien, s'élèvent au-dessus de l'horison; ensuite ils s'abaissent jusqu'à l'instant de leur coucher. Dans l'un et dans l'autre cas, leurs mouvemens en hauteur sont très-inégaux; cependant les variations qu'ils éprouvent ne sont pas assez grandes, pour qu'il ne soit pas permis de supposer sans craindre d'erreurs sensibles, que pendant la courte durée de quatre ou six observations, les changemens en hauteur soient proportionnels au tems. Si l'on veut observer plusieurs hauteurs dans un des momens où cette supposition s'éloigne le moins de la réalité, c'est-à-dire lorsque le soleil n'est pas trop proche du méridien, il faudra opérer de la manière suivante. On écrira l'heure, la minute et la seconde, auxquelles chaque observation a été faite; et l'arc parcouru par l'alidade divisé par le nombre des observations sera la hauteur moyenne correspondante à l'heure moyenne des observations. En effet, la première hauteur observée sera celle de l'astre à l'instant de la première observation, la seconde hauteur sera égale à la première plus ou moins la quantité dont l'astre a monté ou descendu dans l'intervalle de la première à la seconde observation, ou réellement sa hauteur à l'instant de la seconde observation. L'arc parcouru par l'alidade du grand miroir, sera donc égal à la somme des deux hauteurs observées; et si le mouvement en hauteur a été sensiblement proportionnel au tems, la moitié de la somme de ces deux hauteurs ou la moitié de l'arc compté sur l'instrument, sera la hauteur moyenne correspondante à l'heure moyenne, ou à la moitié de la somme des heures des deux observations. Si l'on a fait quatre observations, l'arc parcouru par l'alidade sera la somme des quatre hauteurs observées; et si l'on prend le quart de cette somme, on aura la hauteur moyenne correspondante au quart de la

Digitized by Google

somme des heures des quatre observations, ou à l'heure moyenne de ces observations. Si l'on avait observé six hauteurs, le sixième de l'arc parcouru par l'alidade serait la hauteur moyenne correspondante à l'heure moyenne; et ainsi de suite pour un plus grand nombre d'observations.

349. La quantité dont les distances de la lune au soleil ou aux étoiles, varient dans un intervalle de tems donné, est bien moins considérable que les changemens en hauteur dans le même intervalle; et la supposition que les changemens des distances sont proportionnels aux tems, peut être considérée dans la pratique comme très-exacte. Il faut cependant en excepter le cas où la lune est très-près du méridien, et qu'elle y passe à une très-grande hauteur. Quoique les changemens de la distance vraie, ne soient nullement affectés par cette circonstance; cependant, comme on observe réellement la distance apparente qui éprouve alors des variations très-grandes et très-inégales, cette hypothèse pourrait devenir la cause d'erreurs dont l'influence serait très-sensible sur la distance vraie calculée, et par conséquent sur la longitude que l'on pourrait en conclure. C'est pourquoi, il ne faudra jamais prendre de distances pendant la demi-heure qui précède le passage de la lune au méridien et pendant la demi-heure qui le suit; mais dans le cas seulement où cet astre doit y passer à plus de 80° à 84° de hauteur.

On devra toujours avoir l'attention de vérifier si les miroirs sont perpendiculaires au plan de l'instrument, avant de commencer les observations de distances. Au reste, comme le cercle est beaucoup plus léger que le sextant, on le tiendra avec plus de facilité dans toutes les positions : il n'y en aura de véritablement gênantes que, lorsque l'astre qui est vu directement aura une

Digitized by Google

très-grande hauteur. On se servira de la méthode qui a été enseignée à l'art. 321, pour observer le contact dans un plan parallèle à celui de l'instrument.

350. Afin de ne pas se fatiguer inutilement à ramener à chaque observation dans le champ de la lunette, les images des deux astres dont on observe la distance; il faut, avant de commencer l'observation, chercher dans la Connaissance des tems, quelle doit être à-peu-près cette distance. Quand on l'aura trouvée, il sera facile d'en conclure la position que doivent avoir les alidades à l'instant de chaque observation, de la manière suivante.

Je suppose que les miroirs du cercle avec lequel on doit observer, soient parallèles, lorsque l'alidade du petit miroir répond à 471° 30′; et que la distance soit de 80°. J'ajoute la distance simple de 80° à 471° 30′, et j'ai 551° 30′ pour la première position de l'alidade du petit miroir.

Le double de la distance ou 160° sera la position de l'alidade du grand miroir à la seconde observation. La position de l'alidade du petit miroir à la troisième observation, sera 551°30′ + 160° ou 711° 30′. Celle du grand miroir à la quatrième observation sera 160° + 160° ou 320°; et ainsi de suite, en ajoutant toujours le double de la distance au nombre qui indique la position que devait avoir précédemment la même alidade. On écrira les positions que les alidades doivent prendre successivement, dans un tableau ainsi qu'il suit :

Digitized by Google

Positions des alidades.

OBSERVATIONS.	GRAND MIROIR.	PETIT MIROIR.
1re.	. . . . .	. . .551° 30′
2.	. . . . .160°	
3.	. . . . .	. . .711 30
4.	320	
5.	. . . . .	. . .151 30
6.	480	
7.	. . . . .	. . .311 30
8.	640	
	etc.	etc.

Si l'on donne successivement aux alidades les positions marquées dans le tableau précédent, on trouvera, sans aucune espèce de tâtonnement, les deux astres dans le champ de la lunette.

351. On peut employer jusqu'à huit ou dix observations pour un même calcul ; mais on fera bien de se contenter de six. En supposant que la plus grande erreur de la graduation soit d'une demi-minute ou de 30″, on n'aura jamais à craindre une erreur de plus du sixième de cette quantité sur l'angle observé, ou de 5″ ; la plupart du tems, cette erreur ne sera pas de plus de 3″. Après avoir compté l'arc parcouru par l'alidade

Digitized by Google

à la fin de la sixième observation, on pourrait remettre l'alidade du grand miroir sur le point zéro de la division, et recommencer six autres observations pour servir à un second calcul; mais il vaudra mieux regarder l'arc qu'on vient de compter sur l'instrument comme point de départ, et continuer à faire mouvoir les alidades alternativement dans le sens de la graduation. C'est pourquoi l'on doit continuer à écrire d'autres nombres sur le tableau précédent et y indiquer 12 ou 18 positions différentes. La somme des six dernières distances observées sera égale à l'arc compté à la fin de l'observation de ces six distances, moins l'arc compté à la fin de l'observation des six premières. Cette manière est préférable à l'autre par plusieurs raisons; d'abord les erreurs de la graduation dont seront affectées les distances qui serviront à chaque calcul, seront différentes, et l'on n'aura pas à craindre l'influence du *maximum* de ces erreurs sur la longitude moyenne qui résultera des deux calculs. D'un autre côté les alidades ayant eu des positions différentes sur le limbe de l'instrument, s'il existe quelques petites imperfections dans la manière dont il est centré, ou dans quelques autres parties essentielles de sa construction, l'influence de ces imperfections ne sera jamais à son *maximum*, sur toutes les longitudes des différens calculs.

352. Les distances mesurées avec un cercle à réflexion, ne seront pas affectées de l'erreur que l'on peut commettre en observant le point de la division où répond l'alidade du petit miroir, lorsque les deux miroirs sont parallèles; elles seront dégagées des erreurs provenant du défaut de parallélisme des surfaces des verres colorés; et on pourra les corriger d'une grande partie de l'erreur occasionnée par le manque de parallélisme des surfaces du

Digitized by Google

grand miroir. Les plus grandes erreurs que l'on aura à craindre seront donc celles de la graduation, qui viennent d'être évaluées à 5″ ou 6″, après six observations. Si l'on ajoute la moitié de cette quantité pour tenir compte des petites imperfections inconnues auxquelles il est impossible de remédier ; on pourra conclure que le cercle à réflexion donne les distances du soleil à la lune à moins de 8″ à 9″ près. Cette petite erreur se combinera avec les erreurs inévitables que l'on commet en mettant les astres en contact, et il résultera de leur réunion que l'on pourra se flatter d'obtenir les distances à 15″ ou 18″ près. On voit que le cercle à réflexion donne les angles avec une précision qui ne laisse rien à desirer ; et l'on ne saurait trop engager les marins à se servir d'un instrument qui présente de si grands avantages, de préférence à tous les autres.

353. Lorsqu'on voudra obtenir le relèvement astronomique d'un objet terrestre avec une grande précision, il sera possible d'observer la distance du soleil à cet objet par six ou huit observations ; mais dans les cas ordinaires on se bornera à la distance double.

354. On peut également mesurer avec un cercle les distances angulaires de deux objets terrestres ; mais à moins que ces distances ne soient destinées à des observations délicates, il vaudra mieux se servir du sextant. Les octans même les plus communs ont une exactitude suffisante lorsqu'il s'agit de prendre des relèvemens pour faire des cartes hydrographiques.

Digitized by Google

CHAPITRE XXIII.

La Boussole.

355. La boussole indique la direction de la ligne NORD et SUD, et sert à mesurer les angles que cette ligne fait avec la route d'un vaisseau, ou bien avec les rayons visuels dirigés sur les objets terrestres et célestes qui sont à l'horison : ces derniers angles sont ceux qu'on appelle les relèvemens des objets.

356. Tout le monde sait qu'une aiguille aimantée suspendue par le moyen d'un fil fixé à son centre de gravité, et dont par conséquent tous les mouvemens sont libres, jouit de la propriété de se maintenir dans un même plan, et d'y revenir après plusieurs oscillations, toutes les fois qu'elle en a été écartée par une cause quelconque. Le plan dans lequel se tient l'aiguille aimantée, s'appelle méridien magnétique ; l'angle qu'il forme avec le méridien terrestre se nomme déclinaison de l'aiguille. Cet angle n'est pas le même dans tous les lieux de la terre : il varie aussi dans un même lieu, et devient plus grand ou plus petit au bout d'un certain tems ; mais ses variations sont insensibles dans l'espace de plusieurs mois. Quelquefois la déclinaison est nulle, alors l'aiguille se dirige exactement dans le plan du méridien terrestre, et indique la ligne NORD et SUD. L'astronomie nautique enseigne les moyens d'observer la déclinaison de l'aiguille dans le lieu où l'on se trouve ; ainsi toutes les fois que l'on aura mesuré avec une boussole, l'angle que la route

Digitized by Google

d'un vaisseau ou le rayon visuel dirigé sur un objet quelconque, fait avec la direction de l'aiguille, si l'on y ajoute ou si l'on en retranche la déclinaison observée, on aura l'angle que cette route ou ce même rayon visuel fait avec la ligne NORD et SUD.

Lorsque l'aiguille aimantée est suspendue à l'extrémité d'un fil, elle prend aussi par rapport au plan de l'horison, un degré d'inclinaison, qui est d'autant plus grand que l'on est plus proche des pôles, et qui diminue à mesure que l'on s'avance vers l'équateur. Près du pôle NORD du monde, l'extrémité de l'aiguille qui est dirigée vers ce pôle, s'abaisse au-dessous du plan de l'horison; si l'on approche de l'équateur, elle se relève insensiblement, et finit par se trouver dans ce même plan. Près du pôle SUD du monde, le pôle SUD de l'aiguille est au-dessous de l'horison, et il s'en approche de plus en plus à mesure que l'on avance vers l'équateur. L'angle que l'aiguille forme avec le plan horisontal, s'appelle son inclinaison. La connaissance de l'inclinaison de l'aiguille pour tous les lieux où l'on a observé sa déclinaison, serait bien propre à nous éclairer sur la véritable théorie de l'aimant; mais dans la pratique de la navigation, il s'agit d'obtenir les angles que la route ou les rayons visuels dirigés sur les objets, forment avec le méridien magnétique, et comme ces angles ne peuvent se mesurer qu'avec une aiguille horisontale, ce n'est pas ici le lieu de s'en occuper.

357. L'aiguille d'une boussole doit être posée sur un pivot dont la pointe soit très-aigue, et sur lequel elle puisse tourner aussi librement qu'il est possible. Elle doit aussi être balancée sur ce pivot, au moyen d'un poids qu'on y ajoute, et qui sert à la maintenir dans une

Digitized by Google

situation horisontale : alors elle indique la direction de la ligne NORD et SUD ; ou si elle s'en écarte, elle en prend une autre qui, comme on vient de le dire, est propre à la faire connaître. Une aiguille aimantée ainsi disposée est la pièce principale de toutes les boussoles ; les autres pièces, dont elles sont composées, servent ou à garantir cette aiguille de l'agitation que l'air pourrait lui communiquer, ou à rendre l'instrument propre à donner la mesure des angles de relèvemens, ou bien enfin à rendre l'aiguille aimantée aussi indépendante, qu'il est possible, des mouvemens du vaisseau.

358. Pour garantir l'aiguille de l'agitation que l'air pourrait lui communiquer, on la renferme dans une boîte cylindrique (*fig.* 15 et 16), que l'on nomme cuvette de la boussole. La partie supérieure *AODO* est fermée avec une glace. Le pied du pivot *NM*, destiné à supporter l'aiguille est au milieu du fond *BICI* de la cuvette, et sa pointe *M* doit se trouver exactement dans l'axe du cylindre *ABCD*. Avant de placer l'aiguille sur son pivot, on la charge d'un carton circulaire *fig.* 17, dont le diamètre est un peu plus petit que celui de la cuvette ; afin qu'il puisse s'y mouvoir librement, sans cependant que sa circonférence soit trop éloignée des parois intérieures. C'est sur ce carton que l'on trace les trente-deux aires de vent ou rhumbs de vent de la boussole. On se dispense d'en donner ici les noms, parce qu'ils sont assez généralement connus ; mais on les a écrits, *fig.* 17, à côté du rhumb de vent auquel ils appartiennent : ceux qui ne les connaîtraient pas pourront les y trouver. Ce carton sur lequel on a tracé les rhumbs de vent, s'appelle rose du compas ; il doit être placé sur l'aiguille, de manière que la ligne NORD et SUD, soit exactement parallèle à la direction qu'elle doit prendre, et puisse

Digitized by Google

indiquer cette direction. Dans les boussoles qui servent à diriger la route d'un vaisseau, et que l'on nomme compas de route, on se contente de tracer sur la rose les trente-deux rhumbs de vent. Mais on divise les angles qu'ils forment entre eux en deux parties égales, afin que celui qui gouverne puisse distinguer le quart, le tiers ou la moitié d'un demi-rhumb de vent; c'est-à-dire afin qu'il ne soit pas exposé à se tromper de plus de 2 ou 3 degrés sur la direction de la route : cette exactitude est suffisante dans la pratique.

A l'égard des boussoles destinées à l'observation des relèvemens, on trace à la circonférence de la rose, un cercle divisé en 360°. Alors, au lieu de désigner les directions par les noms des rhumbs de vent, on les indique par les angles qu'elles forment avec la ligne NORD et SUD. Le point zéro de la graduation doit répondre au NORD qui est marqué par une étoile. Quelquefois on continue à compter les 360° de suite, en allant du NORD à l'EST, ensuite de l'EST au SUD; et revenant au NORD en passant par l'OUEST. D'autres fois on divise le cercle en deux parties, et l'on compte 180° depuis le NORD jusqu'au SUD, en passant par l'EST; l'on compte également 180° du NORD au SUD, en passant par l'ouest. Mais la meilleure méthode est de considérer la rose du compas, comme divisée en quatre parties de 90° degrés chacune, par les quatre points cardinaux, ou par les lignes NORD et SUD, et EST et OUEST. Ainsi, on comptera 90° de suite du NORD à l'EST, et 90° également du SUD à l'EST; il en sera de même du NORD à l'OUEST et du SUD à l'OUEST. De cette manière, le NORD-EST qui est intermédiaire entre le NORD et l'EST, sera indiqué Nord 45° Est, et le SUD-OUEST s'écrira Sud 45° Ouest. L'amplitude du soleil ou sa distance

Digitized by Google

angulaire à la ligne EST et OUEST quand il est à l'horison, sera égale au complément de l'arc observé. Dans ce cas, il vaudrait mieux introduire l'usage de ne calculer ou de ne donner dans les tables que des azimuths, qui seraient alors obtenus directement par l'observation.

359. Les parois intérieures de la cuvette *ABCD*, sont peints en blanc ; aux quatre extrémités de deux diamètres perpendiculaires entre eux, on a tracé en noir sur ces parois, quatre lignes qui doivent être perpendiculaires au cercle *BICI* ou au fond de la cuvette. Ces lignes sont éloignées de 90°, et lorsqu'une d'elles répond au NORD de la rose, par exemple, les trois autres répondent aux trois autres points cardinaux, c'est-à-dire au SUD à l'EST et à l'OUEST. A présent, je suppose que l'on fasse tourner la cuvette de la boussole d'un certain nombre de degrés, les quatre lignes noires tracées sur les parois intérieures, s'écarteront successivement des quatre points cardinaux de la même quantité, et à la fin du mouvement, le nombre de degrés marqué au point de la graduation de la rose, où ces quatre lignes répondent, sera la mesure de l'arc que la cuvette aura parcouru : de plus, les rhumbs de vent qui correspondront à ces lignes, seront ceux dans lesquels se trouvent les deux diamètres qui viennent y aboutir. Si l'on veut qu'une boussole soit propre à faire connaître la direction de la route d'un vaisseau, il faudra donc que le diamètre passant par deux des lignes noires des parois diamétralement opposées, soit placé parallèlement à la quille ; alors le rhumb de vent de la rose, correspondant à la ligne qui sera du côté de la proue du vaisseau, sera le rhumb de vent de la route.

Les boussoles destinées à observer des relèvemens, sont appelées, par les marins, compas de variation,

Digitized by Google

parce qu'on en fait un grand usage pour observer la déclinaison de l'aiguille aimantée, qui est nommée vulgairement variation de la boussole. Comme les relèvemens doivent être mesurés avec autant de précision qu'il est possible, on a tracé près de la circonférence de la rose du compas de variation, un cercle gradué, ainsi que nous l'avons déja dit. Mais on a ajouté à l'instrument deux autres pièces, propres à faire connaître la direction dans laquelle se trouve l'objet relevé. Sur le couvercle *AODO*, *fig.* 16, sont deux pinnules *DQ* et *AP*, qui lui sont perpendiculaires. Dans la pinnule *DQ* qui doit être la plus proche de l'œil, on a pratiqué une rainure très-étroite; dans la pinnule *AP* qui en est la plus éloignée, on a fait une rainure plus large, au milieu de laquelle se trouve un fil qui, lorsqu'on regarde par la pinnule *DQ*, doit être vu sur l'objet terrestre ou céleste dont on prend le relèvement, ou bien le partager en deux parties égales, s'il a quelque étendue. La rainure de la première de ces pinnules et le fil de l'autre, doivent être aux extrémités du diamètre qui passe par deux des lignes noires diamétralement opposées et que l'on a tracées sur les parois intérieures de la cuvette. Alors l'angle que le rayon visuel qui passe par les deux pinnules, fait avec la direction de l'aiguille, sera égal à l'angle que le diamètre passant par les lignes noires qui sont au-dessous, fait avec la même aiguille; et il aura pour mesure l'arc marqué par l'une de ces lignes sur la rose du compas.

Le cercle gradué de la rose d'une boussole destinée aux usages ordinaires de la navigation, est tracé, ainsi que les rhumbs de vent, sur du papier. Mais dans les instrumens construits pour faire des observations plus délicates, on applique sur la circonférence de la rose,

Digitized by Google

un cercle de métal blanc, divisé avec soin ; et au lieu des lignes tracées avec de la peinture sur les parois intérieures de la cuvette, on place des fils, aux extrémités des diamètres qui se croisent à angles droits, ou bien des lames de métal, sur lesquelles sont tracées, au niveau de la rose, des lignes propres à remplacer les fils, mais dont le trait est plus net, et donne le moyen d'estimer, avec assez de précision, le point de la graduation où l'extrémité de chaque diamètre répond. Afin de pouvoir juger ce point avec encore plus de précision, lorsque la boussole repose sur le terrain et qu'elle est tranquille, on a tendu sur la glace qui sert de couvercle à la cuvette, deux fils qui viennent aboutir à l'extrémité supérieure des lignes tracées dans l'intérieur des parois, et qui se croisent au centre du couvercle, ou dans l'axe du cylindre de la cuvette. On peut remédier, au moyen de ces deux fils, aux petites erreurs que les parallaxes pourraient produire sur l'estime de l'angle des relèvemens. Il faut, pour cela, placer l'œil au-dessus d'un de ces fils, de manière à ce qu'il paraisse se confondre avec la ligne verticale intérieure qui lui correspond ; alors le point où ce fil paraît couper la graduation, est celui qui marque l'arc que l'on doit compter sur l'instrument, sans que l'on ait à craindre l'effet d'aucune parallaxe.

360. On conçoit qu'il est nécessaire que l'axe du cylindre de la cuvette se trouve dans une situation verticale, pour que la mesure des angles observés soit exacte. Il faudra donc, pour qu'une boussole puisse servir en mer, que la cuvette soit suspendue de manière à ne participer que le moins possible aux mouvemens du vaisseau. Voici comment on y parvient. La suspension des boussoles est d'abord composée d'une pièce de cuivre *ABCDE*, la partie inférieure *BD* est divisée en deux parties égales au point *C*, autour duquel on peut la

Digitized by Google

faire tourner à volonté. *AB* et *DE* sont (aux extrémités desquels passent deux boulo dans un cercle de cuivre *AHEH*, où l'on a trous *A* et *E*, diamétralement opposés. Ce (cercle de suspension ; lorsqu'il repose su il peut tourner librement autour du di l'axe *AE*. A l'extérieur de la cuvette, (autres boulons *F* et *G*, dont les axes doi dans le prolongement du diamètre de l passe en même tems par deux des lignes parois intérieures, et par l'extrémité de la qui supporte l'aiguille. Les boulons *F* et *G* dans deux trous percés dans le cercle *AHEH*. Le diamètre qui passe par ces trous est perpendiculaire au diamètre *Al* milieu des trous *A* et *E*, et se trouve plan. Lorsque la cuvette posera sur le pension, elle pourra tourner autour de l'a cercle de suspension lui-même pourra tou l'axe *AE*, perpendiculaire à *FG* ; elle tour ment et en même tems sur deux axes entre eux, et elle pourra prendre, en ve mouvemens, tous les degrés d'inclinaiso en tel sens que l'on voudra. Dès lors, à la partie inférieure de la cuvette, un force d'inertie fût assez grande pour l'er aux mouvemens du vaisseau, elle ne aucune façon à ces mouvemens. De plu de gravité de ce poids passait par l'axe d maintiendrait cet axe dans une ligne ve pourrait, dans tous les tems, avoir la m angles observés.

Il est impossible de rendre les mo

Digitized by Google

suspension d'une boussole assez libres, et de placer au fond de la cuvette un poids assez considérable pour empêcher cette cuvette de prendre une certaine partie des mouvemens du vaisseau. Il a donc fallu prendre des moyens pour qu'il n'y eût qu'une très-petite partie de ces mouvemens qui pussent se communiquer à l'aiguille aimantée. On y est parvenu en plaçant les deux axes de rotation de la suspension dans un même plan, et en faisant passer ce plan par l'extrémité supérieure du pivot où repose l'aiguille. Alors elle se trouve au centre de tous les mouvemens, c'est-à-dire, au point de concours des deux axes *AE*, *FG*, autour desquels ils ont lieu ; ainsi elle doit avoir autant d'immobilité qu'il est possible de lui en donner.

361. La boussole, garnie de sa suspension, est posée dans une boîte carrée faite en bois, *fig.* 15, et qui la garantit des impulsions qu'elle pourrait éprouver de la part du vent. La pièce *ABDE* est retenue au fond de cette boîte, de manière, cependant, à pouvoir tourner autour du point *C*, qui est au milieu de la partie inférieure. C'est en faisant mouvoir cette pièce que l'on dirige les pinnules fixées au-dessus du couvercle, dans la direction des objets qu'on veut relever.

362. Les observations que l'on fait avec la boussole, exigent le concours de deux observateurs. L'un d'eux est occupé à diriger les pinnules sur l'objet, tandis que l'autre regarde le point de division auquel répond la ligne tracée sur les parois intérieures de la cuvette. Lorsqu'on observe des relèvemens à terre, ces deux fonctions sont également faciles, parce que la rose du compas est immobile ; mais lorsqu'on est en mer, celles du second observateur demandent un certain degré d'habitude. Malgré les précautions que l'on a prises dans la construction de l'instrument,

Digitized by Google

pour empêcher l'aiguille de participer aux m
vaisseau, elle fait encore des oscillations
degrés, à droite et à gauche de la direction
magnétique ; ainsi ce ne peut être le point
tion où répond la ligne des parois intérieure
d'apprécier. Il faut juger, par estime, le
graduation qui s'écarte, à droite et à gauch
des parois intérieures, d'une même quantité
celui qui est au milieu de l'arc que cette
parcourir à chaque oscillation. Cette estime
plus exacte, que les oscillations seront m
moins grandes, et, par conséquent, que
plus tranquille. Lorsque le tems est mauvai
tromper de plusieurs degrés dans l'évaluat
fait. Dans les tems les plus favorables, on r
se flatter d'observer les relèvemens à moin
Il ne faudra donc pas, si l'on veut obtenir
précision, se contenter d'une seule observa

On a voulu donner à un seul observate
de prendre les relèvemens avec une bousso
placé dans l'intérieur de la cuvette, et au niv
une lame de métal mobile : au moment où
voit l'objet qu'il relève au travers des pin
une détente, alors cette pièce de métal vient
et l'arrête. On juge, avec une grande facilité
précision, le point de la graduation où ré
tracée sur cette lame. Mais ce moyen, qui
séduisant, doit être entièrement proscrit. En
la pointe du pivot doit, à la longue, s'ém
secousse qu'elle éprouve à l'instant où l'aig
en second lieu, il a encore le très-grand
de fixer souvent l'aiguille au moment de s
écarts. Alors, un relèvement qui, avec le

Digitized by Google

deux observateurs, aurait pu être pris à 15′ près, serait peut-être affecté, par cette méthode, d'une erreur de plusieurs degrés.

363. Les relèvemens des objets terrestres ou célestes qui sont à l'horison, ou ceux des astres qui n'ont pas une très-grande hauteur et peuvent être apperçus au travers des pinnules, s'observent de la même manière. On adapte à la pinnule qui est la plus proche de l'œil, un verre coloré, avec lequel on regarde le soleil. Lorsque cet astre est élevé au-dessus de l'horison, et qu'on ne l'apperçoit plus au travers des pinnules, on se sert de l'ombre d'un fil qui est tendu à l'extrémité supérieure de ces pinnules. Le premier observateur dirige ce fil dans le plan du vertical du soleil, et fait coïncider l'ombre qu'il porte sur la glace du couvercle, avec un autre fil tendu sur cette glace au pied des pinnules. Dès que l'ombre du fil supérieur est confondue avec le fil inférieur, il avertit le second observateur qui examine, comme dans l'autre observation, le point de la graduation qui répond à une des lignes tracées dans l'intérieur de la cuvette : le nombre de degrés et de minutes marqués à ce point sera la mesure de l'angle que forme le plan du vertical du soleil avec le méridien magnétique, ou l'azimuth du soleil. Il est à propos de remarquer que tous les mouvemens d'une boussole ayant lieu dans un plan vertical, l'ombre du fil supérieur aura une très-grande mobilité ; et il sera extrêmement difficile de la faire coïncider avec le fil inférieur : aussi les observations de cette espèce pourront-elles être affectées de grandes erreurs. Il ne faudra les employer que dans le cas où l'on n'aura besoin d'obtenir l'azimuth qu'à quelques degrés près. On ne devra jamais s'en servir pour en conclure la déclinaison de l'aiguille aimantée. Quoique le soleil paraisse entre les

Digitized by Google

pinnules, jusqu'à ce qu'il soit parvenu à vingt ou vingt-deux degrés de hauteur, on fera néanmoins très-bien de ne pas l'observer avec une boussole, lorsqu'il sera au-dessus de quinze degrés, si l'on veut obtenir la déclinaison de l'aiguille avec une certaine précision.

364. On s'est occupé, pendant longtems, de la forme que l'on devait donner aux aiguilles aimantées; celle des premières aiguilles dont on ait fait usage, étaient des losanges évidées dans le milieu (*fig.* 19); mais on s'est apperçu, en général, que l'axe magnétique des aiguilles aimantées qui ont, comme celle-ci, une très-grande largeur par rapport à leur longueur, est sujet à se déplacer par des causes assez légères, et elles ont été abandonnées. Il a été remarqué, de plus, que les pôles de toutes les aiguilles variaient de position lorsqu'on leur faisait éprouver des secousses ou des commotions très-fortes. On en a conclu qu'il fallait leur donner la moindre largeur possible, afin que ces changemens aient peu d'influence sur la direction qu'elles doivent prendre, et on les a faites de la forme de celle de la *fig.* 20, ou de la *fig.* 21. Il semblait que l'aiguille *AB*, *fig.* 20, dont les deux extrémités se terminent en pointe, avait la forme la plus avantageuse; et il n'y aurait point d'objection à faire contre cette opinion, si les pointes *A* et *B* avaient la propriété de déterminer l'axe magnétique de l'aiguille, car alors sa position deviendrait invariable. Mais l'expérience a prouvé que l'axe magnétique de ces aiguilles était, ainsi que celui de l'aiguille *DEHG*, *fig.* 21, sujet à varier d'une petite quantité, et l'on s'est arrêté à la forme de cette dernière : à présent, toutes les aiguilles des boussoles ont leurs extrémités coupées à angles droits. L'axe magnétique de ces aiguilles ne peut varier que d'une quantité égale à-peu-près à l'angle *GFD*, ou à l'arc

Digitized by Google

soutendu, sur la graduation de la rose par le petit côté *GD*, c'est-à-dire de 4° ou 5°. Si l'on a l'attention de placer la ligne NORD et SUD de la rose dans la direction *IN*, parallèle à l'axe de configuration, l'erreur ne pourra plus être que de la moitié de l'angle *GFD*, ou de 2° à 2° $\frac{1}{2}$; et encore cette erreur, qui n'aura lieu que dans les cas extrêmes, pourra-t-elle être rectifiée par les observations de la déclinaison de l'aiguille, toutes les fois que cette observation elle-même sera susceptible d'une précision plus grande que celle de 2° ou 2° $\frac{1}{2}$. Au reste, dût-elle influer de toute sa valeur, elle n'est pas assez considérable pour compromettre la sûreté de la navigation.

365. Les relèvemens d'un même objet, observés avec deux ou plusieurs boussoles, diffèrent souvent entre eux de un ou deux degrés, et quelquefois de quatre et cinq. On a cru pouvoir remédier aux causes qui produisent ces différences, en cherchant à donner à toutes les boussoles la propriété d'indiquer la véritable direction du méridien magnétique; en conséquence, on a recommandé de ne fixer la rose du compas sur l'aiguille, qu'après en avoir déterminé l'axe magnétique par des expériences. Ce moyen serait sans doute le meilleur, si cet axe ne devait jamais changer de situation; mais comme on ne peut pas douter qu'il doive se déplacer, sans qu'il soit possible de le prévoir et même de s'en appercevoir après que le changement a eu lieu, cette méthode n'est pas exempte d'inconvéniens. En effet, si lors des expériences, l'axe magnétique n'est pas parallèle à l'axe de configuration, la ligne NORD et SUD de la rose ne sera plus dans la direction de la ligne *IN*, et l'un des deux angles *GFN* et *DFN* sera plus grand que l'autre. Le *maximum* des erreurs que l'on aura à craindre sera donc de plus de 2° à 2° $\frac{1}{2}$; il y aurait donc, dans certaines circonstances,

Digitized by Google

du désavantage à placer la ligne NORD et
rose parallèlement à la direction que l'ax
de l'aiguille avait prise à l'instant où l'on fa
riences. Tant qu'il n'y aura rien de changé
nière de poser les aiguilles sous la rose, il
mieux placer la ligne NORD et SUD de cet
la direction de l'axe de configuration.

366. Il y aurait cependant un moyen
beaucoup les erreurs provenant des déplace
magnétique des aiguilles aimantées, et cela
fort simple, dont on parlera d'autant pl
qu'il n'a été, jusqu'à présent, proposé
On doit se rappeler qu'il a été dit (art. 3
magnétique de l'aiguille, *fig.* 21, ne pou
d'un angle à-peu-près égal à *GFD*. Il serait d
de donner aux aiguilles le moins de lar
mais comme on ne peut diminuer leur n
faire perdre de leur vertu, on se trouve
sité de ne rien changer aux dimensions q
lement en usage. Cependant, l'on aura s
difficulté si, au lieu de poser l'aiguille à pl
on trouve le moyen, avec le secours de l
très-légers, de maintenir les deux faces *GL*
situation perpendiculaire à la rose. Alors, l
qui auront lieu dans le plan parallèle à
sans influence sur la direction que la ligne
doit prendre dans le plan horisontal;
ne pourra être affectée que par les chang
ront lieu dans l'épaisseur de l'aiguille. Or
n'occupera jamais, au-dessous de la gradua
de plus de la longueur d'un degré à un
et si l'on place la ligne NORD et SUD exa
lieu, les plus grandes erreurs se trouver

Digitized by Google

moitié, et ne seront jamais de plus d'un demi-degré à trois quarts de degré.

Il faudrait faire bien peu de changemens à la forme des aiguilles dont on se sert pour les rendre susceptibles de tourner sur un pivot dans la position qui vient d'être indiquée. Au lieu de renfler les faces, *fig.* 21, *GHED* dans le sens de leur largeur, et de les percer dans l'épaisseur de l'aiguille, on renflerait, *fig.* 22, ces mêmes faces dans le sens de l'épaisseur, et l'on y pratiquerait un trou *FI*, évasé du côté de *DE*. A l'extrémité *I* de ce trou, on pourrait enchâsser une chappe d'agathe semblable à celle des autres aiguilles : cette chappe poserait sur le pivot qui, au moyen de l'évasement du trou *IF*, ne pourrait pas choquer l'aiguille même dans ses plus grands mouvemens. Le point où l'agathe reposerait sur le pivot, devrait être dans le plan de la surface supérieure de la rose, dont le milieu se trouverait au centre de tous les mouvemens; et les axes de rotation seraient alors toujours confondus avec un des rhumbs de vent qui y sont tracés.

Cette manière de placer l'aiguille sur son pivot aurait encore deux autres avantages qui contribueraient également à diminuer la mobilité de la rose du compas. En premier lieu, le centre de gravité de l'aiguille serait plus éloigné du point de suspension que dans la construction ordinaire ; par conséquent, la propre inertie de l'aiguille produirait plus d'effet pour l'empêcher de participer aux mouvemens du vaisseau. En second lieu, dans les oscillations de l'aiguille, les faces *GHED* éprouveraient, de la part de l'air, une résistance qui contribuerait à en diminuer la vivacité et l'étendue. Enfin, dans cette manière de disposer l'aiguille, tout concourrait à la rendre plus tranquille qu'elle ne l'est dans les boussoles actuellement en usage.

Digitized by Google

NOTES.

L'ÉTENDUE que ce volume a prise, per
sion, par les utiles additions de M. de F
obligés de renvoyer à la fin du troisième
rt des notes qui devaient se trouver à la
et nous nous y sommes décidés d'autant p
que la plupart de ces notes renfermant des
seront mieux et plus commodément placées
diverses que contiendra le troisième volu
manière, le lecteur trouvera réunis, sou
élémens qu'il a le plus souvent besoin de
dans le calcul des observations.

En conséquence, nous avons ainsi renv

1°. La note relative à la mesure des ha
observations du baromètre ;

2°. La note sur la rectification de la
dienne par le calcul des azimuths ;

3°. La note relative à la mesure du p
par les expériences ;

4°. Les formules qui donnent l'applati
terre, d'après la comparaison des degrés

5°. La note relative au mouvement de
système planétaire ;

6°. La note sur la déviation des corps
d'une grande hauteur ;

7°. L'accroissement du diamètre de la
élévations ;

8°. Enfin les diverses tables de réfraction

Digitized by Google

de réduction des mesures anciennes et nouvelles; qui doivent le plus souvent servir ensemble au calculateur. Mais j'ai conrervé ici les notes suivantes, dont l'objet appartenant spécialement au premier livre, ne permettait pas qu'on les en séparât.

NOTE Ire.

Sur l'Équation des hauteurs correspondantes.

Soit Z la distance vraie de l'astre au zénith, dans la première observation qui se fait avant le passage au méridien; soit P l'angle horaire inconnu de l'astre à ce même instant. Pour faire de l'autre côté du méridien l'observation correspondante, on laisse l'alidade de l'instrument sur le même point de la division, ou on l'y replace, si on l'en a détachée; et on observe l'instant où l'astre revient à la même distance apparente au zénith. S'il n'est point survenu de changement dans la réfraction, cette distance apparente répondra à la même distance vraie Z, que dans la première observation; et si, de plus, la distance polaire de l'astre n'a pas changé dans l'intervalle, le nouvel angle horaire sera aussi égal à P, comme dans la première observation; de sorte que l'instant du passage de l'astre au méridien, sera exactement intermédiaire entre ces deux époques. Mais si la réfraction change, ce qui est presque inévitable, la seconde distance apparente répondra à une autre distance vraie Z'; et si, de plus, la distance polaire Δ devient Δ', l'angle horaire variera aussi en conséquence de ces changemens, et deviendra, par exemple, P'. Or, en considérant le triangle sphérique formé par les trois arcs Z, Δ et D; D étant la distance du pôle au zénith, on aura, d'après les formules connues de la trigonométrie sphérique,

Pour la première observation $$\cos P = \frac{\cos Z - \cos D \,.\, \cos \Delta}{\sin D \,.\, \sin \Delta},$$

Pour la seconde $$\cos P' = \frac{\cos Z' - \cos D \,.\, \cos \Delta'}{\sin D \,.\, \sin \Delta'}.$$

Digitized by Google

C'est de là qu'il faut tirer la correction de l'angle hor
On y parviendra aisément, si l'on remarque que le
Z, Z', correspondantes à des distances apparentes
cessairement très-peu différentes l'une de l'autre, puis
de la réfraction, et de la distance polaire qui produise
ne peuvent être que fort petites dans l'intervalle de
que comprennent les observations. Or, en retranchan
tions précédentes l'une de l'autre, on trouve

$$\cos P' - \cos P = \frac{1}{\sin D}\left\{\frac{\cos Z'}{\sin \Delta'} - \frac{\cos Z}{\sin \Delta}\right\} - \frac{\cos D}{\sin D}\left\{\right.$$

Cette équation peut se mettre sous la forme suivan

$$\cos P' - \cos P = \frac{1}{\sin D}\left\{\frac{\cos Z' - \cos Z}{\sin \Delta'} + \frac{\cos Z}{\sin \Delta'} - \frac{\cos Z}{\sin \Delta}\right.$$

ou bien

$$\cos P' - \cos P = \frac{1}{\sin D}\left\{\frac{\cos Z' - \cos Z}{\sin \Delta'} - \frac{\cos Z.\left\{\sin \Delta' - \sin\right.}{\sin \Delta \sin \Delta}\right.$$

En substituant aux différences des cosinus et sinus
fonction de l'angle sous-multiple, et changeant le
les termes, il vient

$$2.\sin\tfrac{1}{2}.\left\{P' + P\right\}\sin\tfrac{1}{2}\left\{P' - P\right\} = \frac{1}{\sin D}\left\{\frac{2.\sin\frac{1}{2}\left\{\right.}{}\right.$$
$$+ \frac{2\cos Z.\cos\frac{1}{2}\left\{\Delta' + \Delta\right\}\sin\frac{1}{2}(\Delta' - \Delta)}{\sin \Delta \sin \Delta'}$$

D'après ce que nous venons de dire, les différences
$\Delta' - \Delta$, sont extrêmement petites; par conséquen
ceux de leurs moitiés sont des fractions fort petites aus
donc nous borner à conserver leur première puissar
les autres, ce qui revient à supposer $P = P'$, Z :
dans tous les termes qui les multiplient; on aura
approximation suffisante,

Digitized by Google

$$2 \,.\, \sin P \,.\, \sin \tfrac{1}{2} \left\{ P' - P \right\} = \frac{1}{\sin D} \left\{ \frac{2 \sin Z \,.\, \sin \frac{1}{2} \left\{ Z' - Z \right\}}{\sin \Delta} \right.$$
$$\left. + \frac{2 \cos Z \,.\, \cos \Delta \,.\, \sin \frac{1}{2} \left\{ \Delta' - \Delta \right\}}{\sin^2 \Delta} \right\} - \frac{\cos D \,.\, \sin \left\{ \Delta' - \Delta \right\}}{\sin D \,.\, \sin^2 \Delta}.$$

On peut encore simplifier cette expression en substituant le rapport des petits arcs $\frac{P' - P}{2}$, $\frac{Z' - Z}{2}$, $\frac{\Delta' - \Delta}{2}$, à celui de leurs sinus, ce qui donne, en divisant par $\sin P$,

$$P' - P = \frac{\left\{ Z' - Z \right\} \sin Z}{\sin D . \sin \Delta . \sin P} + \left\{ \Delta' - \Delta \right\} \left\{ \frac{\cos Z \,.\, \cos \Delta}{\sin D \, \sin^2 \Delta \,.\, \sin P} - \frac{\cos D}{\sin D . \sin^2 \Delta . \sin P} \right\}$$

On peut éliminer Z du terme, multiplié par $\Delta' - \Delta$ au moyen de la valeur

$$\frac{\cos Z}{\sin D \, \sin \Delta} = \cos P + \frac{\cos D \, \cos \Delta}{\sin D \,.\, \sin \Delta},$$

qui se tire de l'équation fondamentale entre les élémens du triangle. En substituant cette équation, il vient

$$P' - P = \frac{\left\{ Z' - Z \right\} \sin Z}{\sin D . \sin \Delta . \sin P} + \left\{ \Delta' - \Delta \right\} \left\{ \frac{\cos P \,.\, \cos \Delta}{\sin P \,.\, \sin \Delta} \right.$$
$$\left. + \frac{\cos D . \cos^2 \Delta}{\sin D \, \sin^2 \Delta . \sin P} - \frac{\cos D}{\sin D . \sin^2 \Delta . \sin P} \right\}$$

ou enfin, en réduisant

$$P' - P = \frac{\left\{ Z' - Z \right\} \sin Z}{\sin D . \sin \Delta \, \sin P} + \left\{ \Delta' - \Delta \right\} \left\{ \frac{1}{\operatorname{tang} P \,.\, \operatorname{taug} \Delta} - \frac{1}{\operatorname{tang} D . \sin P} \right\}.$$

Cette expression de $P' - P$ renferme encore l'angle horaire P, qui est inconnu, et, par conséquent, elle semble impliquer un cercle vicieux; mais à cause de la petitesse des variations $Z' - Z$ et $\Delta' - \Delta$, il suffit de substituer, dans le second membre, pour P une valeur approchée, par exemple, l'angle horaire moyen que l'on conclurait des observations mêmes sans y faire aucune correction; c'est-à-dire, que si T est l'époque de la première observation en tems de l'horloge, et T' l'époque de la seconde observation, la demi-différence $\frac{T' - T}{2}$ sera la valeur approchée de l'angle horaire, exprimée aussi en tems de l'horloge. D'après la marche de cette dernière, on convertira

Digitized by Google

cet angle en tems sydéral, si l'on a observé une étoile, ou en tems solaire apparent, si l'on a observé le soleil, ce qui se fera en prenant, pour ce jour-là, le mouvement du soleil dans la Connaissance des tems. A la vérité, si la pendule est réglée sur le tems sydéral, il faudra préalablement convertir sa marche en tems moyen, car c'est ainsi que la marche du soleil se trouve exprimée. Soit donc R le retard de la pendule sur le tems sydéral, en sorte qu'elle fasse $86400 - R$ oscillations entre les deux passages d'une même étoile au méridien. Le nombre de secondes moyennes correspondant au même intervalle, sera $86400'' - 235'',91$; d'après la définition du tems moyen que nous avons donnée dans la page 198; en faisant $r = 235,91$, ce sera $86400 - r$; par conséquent, pour réduire en tems moyen un nombre N d'oscillations de l'horloge, il faudra faire la proportion $86400 - R$ oscillations de l'horloge sont à $86400'' - r$ secondes de tems moyen, comme N oscillations de l'horloge sont au nombre de secondes moyennes correspondantes, qui sera $\frac{\{86400 - r\}N}{86400 - R}$, ou $\frac{\{86400 - R - r + R\}N}{86400 - R}$, ou enfin $N + \frac{(R - r).N}{86400 - R}$. Le dernier terme exprime la correction qu'il faut faire au nombre de secondes observé à l'horloge pour le convertir en secondes moyennes. Cette correction sera additive à N si R surpasse r, et elle sera négative dans le cas contraire. Soit donc $N + \frac{\{R - r\}N}{86400 - R} = N'$; pour réduire cet intervalle de tems moyen en tems solaire apparent, on prendra, dans la Connaissance des tems, l'intervalle de deux midis, exprimé en tems moyen pour le jour où l'on observe; et si cet intervalle, toujours peu différent de 24 heures moyennes, est représenté en secondes par $86400 - S$, on fera la proportion $86400 - S$ secondes moyennes sont à 86400 secondes de tems solaire comme N' secondes moyennes sont au nombre cherché, qui sera $\frac{N'.86400}{86400 - S}$, ou $N' + \frac{S\,N'}{86400 - S}$, ou enfin, en mettant pour N' sa valeur . . . . . .

$$N + \frac{(R - r)\,N}{86400 - R} + \frac{S\,.\,N}{86400 \quad S} + \frac{S.(R - r)\,N}{(86400 - R).(86400 - S)};$$

telle sera donc la valeur de l'intervalle N de tems de l'horloge converti en tems solaire apparent. Le premier terme est le nombre N lui-même, et les autres sont les corrections nécessaires pour le convertir

Digitized by Google

en tems solaire. Ces corrections sont ordinairement fort petites, parce que l'on tache toujours d'approcher la marche de l'horloge du tems moyen ou du tems sydéral, qui diffèrent peu. C'est pour cela que nous avons dégagé N, afin que l'on n'eût que de petits nombres à calculer.

Quand on aura réduit ainsi l'intervalle des observations correspondantes, on prendra la moitié du résultat, et ce sera la valeur approchée de l'angle horaire exprimée en tems solaire. En le multipliant par 15, pour le réduire en arc, on aura la valeur de P, qu'il faut introduire dans la formule de correction qui donne $P' - P$.

Quant au terme de cette correction, qui dépend de $Z' - Z$, ou de la différence des hauteurs vraies, il est évident que cette différence n'est autre chose que celle des réfractions correspondantes à la hauteur apparente où l'on a observé; il sera donc facile de calculer cette différence par les tables, d'après les observations du baromètre et du thermomètre; et pour calculer les coefficiens $\frac{\sin Z}{\sin D \sin \Delta . \sin P}$, il suffira d'employer la distance apparente observée Z. Pour la distance polaire Δ, on emploiera celle qui répond à l'une ou l'autre des observations. On pourra, si l'on veut, employer leur moyenne ou $\frac{\Delta + \Delta'}{2}$.

Enfin pour obtenir $\Delta' - \Delta$, c'est-à-dire, le changement de la distance polaire de l'astre, on prendra dans la Connaissance des tems la valeur de ce changement d'un jour à l'autre, et on calculera proportionnellement sa valeur pendant l'intervalle de tems $T' - T$ écoulé entre les deux observations; on aura ainsi toutes les données nécessaires pour calculer numériquement la valeur de $P' - P$.

Quand on connaîtra cette valeur qui est donnée en arc par la formule, on la multipliera par 15 pour la réduire en tems solaire apparent, puis on convertira ce tems apparent en tems moyen, et ensuite en tems de l'horloge. Soit alors t sa valeur; si l'on nomme ϖ, ϖ' les deux angles horaires P, P', convertis pareillement en tems de l'horloge, on aura

$$\varpi' - \varpi = t$$

or si l'on appelle M l'époque du passage de l'astre au méridien en tems de l'horloge, et que l'on désigne toujours par T; T' les époques des deux observations, comme nous l'avons fait plus haut, on aura

Digitized by Google

Par la première, avant le passage au méridien. . . . $M = T + \varpi$

Par la seconde, après le passage . . . . . $M = T' - \varpi'$

par conséquent

$$M = \frac{T' + T}{2} - \left\{\frac{\varpi' - \varpi}{2}\right\}$$

ou en mettant au lieu de $\varpi' - \varpi$ sa valeur t ·

$$M = \frac{T' + T}{2} - \frac{t}{2}$$

c'est-à-dire, que de la moyenne des époques observées à la pendule, il faut retrancher la moitié de la correction t : bien entendu qu'il faut prendre t avec le signe que lui donnera la formule qui sert à en calculer la valeur. De sorte, par exemple, que si t se trouvait négatif, on l'ajouterait à la distance moyenne au lieu de le retrancher. Mais en suivant les règles des signes algébriques, il n'y aura jamais de difficulté : voilà l'avantage que nous avons à n'introduire dans le calcul que des distances polaires comptées d'un même pôle, au lieu des déclinaisons et des latitudes, dont il faut changer le signe selon qu'elles deviennent boréales ou australes, ce qui exige des attentions particulières et multiplie les chances d'erreurs.

Lorsque l'on ne tient compte que du terme dépendant des variations de la déclinaison, la partie de la correction qui en dépend devient nulle quand $\Delta' - \Delta = D$, c'est-à-dire, lorsque l'astre n'a point de mouvement de déclinaison, ce qui a sensiblement lieu pour le soleil à l'époque du solstice, ainsi qu'on le verra plus loin ; mais la correction disparaît encore lorsque le coefficient de $\Delta' - \Delta$ s'évanouit, c'est-à-dire, lorsqu'on a

$$\frac{1}{\text{tang}\, P . \text{tang}\, \Delta} - \frac{1}{\text{tang}\, D \ \sin P} = 0,$$

ou, en multipliant par $\sin P$,

$$\cos P = \frac{\text{tang}\, \Delta}{\text{tang}\, D}.$$

Cette relation détermine l'époque à laquelle la correction se détruit. Pour que cette destruction soit possible, il faut que tang Δ soit moindre que tang D, afin que cos P soit moindre que l'unité, comme cela doit être si l'arc P a des valeurs réelles. Cette condition ne peut être remplie que sur les parallèles terrestres dans lesquels on a quelquefois tang Δ = tang D, ou $\Delta = D$, c'est-à-dire, sur ceux qui, à certains tems de l'année, voient le soleil à leur zénith.

Digitized by Google

NOTE II.

Description et usage du Vernier.

Le vernier, que l'on appelle aussi *Nonius*, est un instrument au moyen duquel on évalue les fractions des divisions auxquelles on l'applique. Soit *LL*, *fig.* 86 une règle divisée en parties égales, 0 1, 1 2, 2 3. Si l'on veut se servir de cette règle pour mesurer une longueur donnée, plus petite qu'elle, la ligne *aB*, par exemple, on verra bien, par la simple superposition, que cette ligne contient 9 divisions entières de la règle, plus une petite fraction, représentée par l'intervalle *AB*, dont le point *B* excède la 9e. division de la règle; mais la grandeur absolue de cette fraction, et son rapport à une division entière, resteront inconnus. Pour le déterminer, construisez une autre règle *VV*, divisée aussi en parties égales, mais en parties plus petites que les premières, dans une proportion connue, tellement, par exemple, que 9 divisions de la grande règle en vaillent 10 de la petite règle, ou du *vernier*. Si vous posez le vernier le long de la règle, comme le représente la *fig.* 8, la première de ses divisions, qui est marquée 0, coïncidera avec la première de la règle, qui est aussi marquée 0, et la division 10 du vernier coïncidera aussi avec la division 9 de la règle; mais les divisions intermédiaires ne coïncideront pas. La seconde division du vernier sera en arrière de la seconde de la règle d'une quantité égale à la différence des deux divisions, ou à $\frac{D}{10}$, D représentant l'étendue d'une division de la grande règle. De même, la seconde division du vernier sera de $\frac{2D}{10}$ en arrière de sa correspondante, et ainsi successivement l'écart des suivantes sera exprimé par $\frac{3D}{10}$, $\frac{4D}{10}$, $\frac{5D}{10}$, $\frac{6D}{10}$, $\frac{7D}{10}$, $\frac{8D}{10}$, $\frac{9D}{10}$, $\frac{10D}{D}$. Cette dernière valeur est égale à une division entière D, c'est pourquoi la 10e. division du vernier coïncide avec la 9e. de la règle.

Digitized by Google

Concevons maintenant que l'on pousse doucement le vernier le long de la règle, de manière que la coïncidence se fasse sur la première division : il est évident que, par ce mouvement, la 1re. division du vernier s'est avancée d'une quantité égale à $\frac{D}{10}$, puisque c'était là l'expression de sa distance à la première division dans la position précédente. Chacune des autres divisions du vernier s'est donc avancée aussi d'une égale quantité, puisqu'elles se tiennent toutes à des distances invariables ; ainsi leurs écarts sont désormais exprimés par $-\frac{D}{10}, 0, +\frac{D}{10}, \frac{2D}{10}, \frac{3D}{10}, \frac{4D}{10}, \frac{5D}{10}, \frac{6D}{10}, \frac{7D}{10}, \frac{8D}{10}, \frac{9D}{10}$; d'où l'on voit que la division 1 est maintenant la seule qui coïncide avec les divisions de la règle.

Si, dans cette position, le point B tombait précisément à l'extrémité de la 9e. division du vernier, ou sur le dixième trait, on conclurait, avec certitude, que la petite fraction aB est égale à $\frac{D}{10}$, de sorte que l'on aurait $9D + \frac{D}{10}$ pour la longueur totale de la ligne AB.

Mais si cette coïncidence n'a pas lieu, il n'y a qu'à pousser le vernier d'une division de plus, c'est-à-dire, de manière que sa seconde division coïncide avec celle de la règle ; par ce mouvement, chaque division aura encore marché d'une quantité égale à $\frac{D}{10}$, de sorte que leurs écarts autour des divisions correspondantes de la règle seront

$$-\frac{2D}{10}, -\frac{D}{10}, 0, +\frac{D}{10}, +\frac{2D}{10}, +\frac{3D}{10}, +\frac{4D}{10},$$
$$+\frac{5D}{10}, +\frac{6D}{10}, +\frac{7D}{10}, +\frac{8D}{10}.$$

Si, dans cette nouvelle position, le point B répond exactement à la fin de la 9e. division du vernier, ou au dixième trait, on en conclura qu'il dépasse la 9e. division de la règle d'une quantité égale à $\frac{2D}{10}$, c'est-à-dire, aux deux dixièmes d'une division ; on aura donc

ainsi $9D + \frac{2D}{10}$ pour la longueur de la ligne AB.

Si, dans cette seconde position, la 10e. division du vernier n'avait pas encore atteint le point B, on pousserait le vernier d'une division de plus. Si cette troisième fois le dixième trait atteignait le point B, la longueur AB serait $9D + \frac{3D}{10}$, et ainsi de suite. Par conséquent, si l'excès du point B, sur la 9e. division de la règle, est une des fractions $\frac{D}{10}$, $\frac{2D}{10}$, $\frac{3D}{10}$, $\frac{4D}{10}$, $\frac{5D}{10}$, $\frac{6D}{10}$, $\frac{7D}{10}$, $\frac{8D}{10}$, $\frac{9D}{10}$, on l'évaluera exactement par cette méthode.

Mais si elle tombe entre deux quelconques de ces valeurs, on ne l'aura pas tout-à-fait exactement. Par exemple, si l'excès aB est plus grand que $\frac{6D}{10}$, et moindre que $\frac{7D}{10}$, on trouvera que le point B n'est pas encore atteint en faisant coïncider la 6e. division du vernier, et qu'il est dépassé en faisant coïncider la 7e.; on évaluera donc la différence par approximation, en voyant si la coïncidence est plus approchée pour l'une de ces divisions que pour l'autre, et on ajoutera cette différence à $\frac{6D}{10}$, ou on la retranchera de $\frac{7D}{10}$. Dans ce cas il y aura quelque incertitude sur la longueur exacte de la ligne AB; mais cette incertitude sera certainement moindre que $\frac{D}{10}$, puisque la valeur exacte est comprise entre deux expressions qui ne diffèrent que de cette quantité. Il est évident que l'on pousserait plus loin l'exactitude, si le vernier embrassait un plus grand nombre de divisions de la règle, puisqu'alors les différences de ses divisions à celles de la règle deviendraient moindres, et, par conséquent, sa marche d'une coïncidence à une autre serait plus petite. Soit, par exemple, R le nombre de divisions de la règle qui correspond à V divisions du vernier; alors chacune des divisions du vernier vaudra $\frac{RD}{V}$, et la différence de celles-ci à celles de la règle sera, par conséquent, $D - \frac{RD}{V}$,

Digitized by Google

ou $\frac{D.\{V-R\}}{V}$. Ordinairement, on construi
manière que $V-R=1$; d'où $V=1+R$
$\frac{D}{1+R}$ pour la quantité que le vernier mesure
dences de ses divisions. Cette quantité est d'aut
R est plus considérable ; ainsi, toutes choses éga
vernier est d'autant plus sensible qu'il embrasse
nombre de parties ; mais il y a une limite à ce
la difficulté d'observer exactement sur quelles di
coïncidence, difficulté qui augmente à mesure q
des parties du vernier et de la règle sont plus pe

Nous venons de considérer le vernier appliqué à
tiligne. On l'applique également aux divisions cir
sont celles des limbes de nos cercles ; mais alors o
circulaires aussi, et concentriques à la division. Il
leur propriété n'est point changée par cette modifi
s'en sert de la même manière, et on évalue leurs i
pour les divisions rectilignes.

Supposons, par exemple, un limbe circulaire,
10 minutes sexagésimales, en sorte qu'il y ait pré
nutes d'intervalle entre deux divisions consécutives.
le vernier de ce cercle embrasse 9 divisions, et s
parties ; dans ce cas, on aura $D=10'$, $R=9$
par conséquent, la différence des divisions du limb
sera $\frac{10'}{10}=1$ minute sexagésimale ; par consé
une position déterminée de la lunette, le zéro du
à un certain point du limbe, on lira directemen
degrés et de dixaines de minutes sur la division d
on regardera attentivement quelle est la division
coïncide, et on ajoutera un nombre égal de minutes
division ; si la coïncidence n'est pas exacte, on ve
divisions elle tombe, et on évaluera ainsi, par ap
fraction de minute qu'il faut ajouter à son indicatio

Dans nos cercles répétiteurs, où l'on a adopté l
male, qui est en effet bien plus commode que la sexa
utile de diviser aussi le vernier de la même manière

Digitized by Google

les degrés et leurs subdivisions s'écriront de suite comme des nombres ordinaires, même en y comprenant les indications du vernier.

Ordinairement, on met sur les cercles répétiteurs quatre verniers au lieu d'un seul, et on les dispose aux extrémités de quatre alidades, qui se croisent à angles droits sur le limbe. La lecture des quatre verniers doit donner plus d'exactitude qu'un seul, parce qu'il y a plus de chance pour les compensations des erreurs, et leur distribution à angles droits sur le limbe, sert à prévenir ou à éluder l'effet des erreurs locales des divisions. Chacun de ces verniers est armé d'un microscope, pour que l'on puisse juger la coïncidence avec plus d'exactitude, et leur zéro est placé sur chacun d'eux de manière que la coïncidence se fasse sur des divisions différentes. Cette disposition a pour objet d'empêcher l'observateur de se prévenir en faveur de telle ou telle évaluation qu'il aurait faite sur les premiers verniers qu'il lit.

L'usage des verniers est d'une application générale dans tous les cas où il s'agit d'évaluer avec exactitude les fractions d'une grande division. On peut en tirer le parti le plus avantageux, non-seulement dans l'astronomie, mais dans une infinité de problèmes de chimie et de physique, où il faut des mesures exactes. On attribue cette ingénieuse invention à un géomètre français, nommé *Vernier*. Mais les Portugais en réclament l'honneur pour un de leurs compatriotes, nommé *Nonius*. C'est pour cela que cet instrument est souvent appelé par l'un ou l'autre de ces deux noms.

NOTE III.

Sur la mesure de la Méridienne en Pensylvanie.

Je dois prévenir que l'écart de la ligne mesurée ou son azimuth étant très-peu considérable, les corrections auxquelles nous devons parvenir sont pareillement très-petites, et qu'ainsi il suffit de les calculer dans la supposition de la terre sphérique. Soit donc, *fig.* 89, *C* le centre de la surface terrestre, *CE* le rayon de l'équateur, *CP* celui du pôle, et *EAP* un grand cercle représentant le mé-

Digitized by Google

ridien terrestre, qui passe par le point A; extr
ligne géodésique AB, oblique à la méridienne. S
réale de cette ligne, qui se trouve ainsi représenté
cercle AB; car la terre étant supposée sphérique
successives déterminées par le prolongement du ra
le plan d'un même grand cercle. Par le point B, r
cercle BM parallèle à l'équateur; AM sera l'ar
pris entre les parallèles terrestres des points A et
de cet arc qu'il faut déterminer.

Pour cela, par ce même point B, je mène l'a
BN perpendiculairement au plan du méridien AM
comment on peut d'abord calculer AN, et ensu
sultera la valeur de $AM = AN - MN$.

D'abord, dans le triangle sphérique ABN, f
de grands cercles, on connaît l'angle en N qui
A égal à 3° 43′ 30″; c'est l'azimuth de la ligne
AB, ou la longueur de cette ligne, qui e
anglais; on aura donc, par les règles de la trigon
la valeur des côtés AN et BN, car en no
3° 43′ 30″, ces côtés auront pour expression

$$\text{tang}\, AN = \text{tang}\, AB \cos \alpha \qquad \sin BN =$$

Les arcs AN et AB étant fort petits par rapport
entière de la terre, on peut substituer le simple r
celui de leurs sinus ou de leurs tangentes, et la suit
qu'il n'en peut pas résulter d'erreur sensible; on a

$$AN = AB \cos \alpha = 433094{,}6 \qquad BN = AB.$$

Cela revient à résoudre le triangle ABN com
ligne; et c'est ainsi qu'en a usé M. Maskeline.
évaluer $AN - AM$ ou MN, c'est-à-dire l'arc d
entre le grand cercle BN et le parallèle BM, Pour
marquer que ces deux plans étant perpendiculaires
leur commune section BQ est aussi perpendicula
et à l'ordonnée MR qui passe par son pied.
du point M ou l'angle ECM; soit de même
point N ou l'angle ECN. L'angle cherché MCN
férence des latitudes, ou à $L' - L$. De plus, l'ar

soutendra en R, sur l'axe de la terre, un angle que nous nommerons C; enfin, en nommant r le rayon MR ou RB de ce parallèle, et R le rayon terrestre, on aura

$$r = R \cos L \quad CR = R \sin L \quad QR = r \cos C = R \cos L \cos C;$$

et comme l'angle CQR, qui est égal à L', a pour tangente trigonométrique $\frac{CR}{QR}$, on aura, en mettant pour ces lignes leurs valeurs

$$\text{tang } L' = \frac{R \sin L}{R \cos L \cos C} = \frac{\text{tang } L}{\cos C};$$

de là on tire

$$\text{tang } L' \cos C = \text{tang } L,$$

et ensuite

$$\sin \left\{ L' - L \right\} = 2 \sin L' \cos L \sin^2 \tfrac{1}{2} C.$$

Le second membre étant déja multiplié par $\sin^2 \frac{1}{2} C$, qui est une fraction très-petite; on peut y supposer $L = L'$, et alors on a simplement

$$\sin (L' - L) = \sin 2 L \,.\, \sin^2 \tfrac{1}{2} C.$$

Comme l'angle $L' - L$ est fort petit, on peut substituer à $\sin (L' - L)$ le rapport $\frac{MN}{R}$ entre l'arc correspondant MN et le rayon de la terre; de même à $\sin \frac{1}{2} C$, on peut substituer $\frac{1}{2} \frac{BQ}{r}$ ou $\frac{1}{2} \frac{BN}{r}$, c'est-à-dire $\frac{BN}{2 R \cos L}$; et alors l'équation précédente deviendra

$$MN = \frac{\sin 2 L \,.\, \overline{BN}^2}{4 R \,.\, \cos^2 L}, \text{ ou simplement } MN = \frac{\text{tang } L \,.\, \overline{BN}^2}{2 R}.$$

On connaîtra donc l'arc MN puisque l'on connaît BN; mais il faudrait encore avoir la valeur de R, ou du rayon terrestre, qui entre dans cette expression, ce qui semble impliquer une pétition de principes, puisque ce rayon n'est supposé connu que par la mesure de la terre. Mais si l'on remarque qu'à cause de la petitesse

Digitized by Google

de BM et de MN, il n'est pas du tout nécessaire que R soit connu d'une manière bien exacte; de sorte que l'on pourrait même se contenter de la valeur de R qui résulterait de l'arc mesuré, sans avoir égard à la correction MN. Or la valeur du rayon terrestre, ainsi calculé, serait 20842734. En employant cette valeur pour R, prenant de plus $L = 39°.46'.20''$, et $BM = 28196,8$, comme nous l'avons trouvé précédemment, on trouve $MN = 15,9$; c'est la correction nécessaire pour réduire l'arc de grand cercle au parallèle. En le retranchant de AN, qui est 433094,6, on a $AM = 433078,7$. Cette quantité étant ajoutée à la partie mesurée directement sur le méridien, c'est-à-dire, 104988,4, on a l'arc total entre les deux parallèles $= 528067,1$. Il a encore fallu y ajouter 10,84 pieds pour le réduire à la température de 16°,25, où nous l'avons supposé rapporté, et c'est ainsi qu'on a trouvé le nombre 538077,94 pour le résultat définitif dont nous avons fait usage.

NOTE IV.

La Trajectoire décrite par les rayons lumineux en traversant l'atmosphère, est assez peu courbe pour que les lignes menées de ses différens points à un même astre puissent être censées parallèles, du moins dans les cas ordinaires de la réfraction.

Pour démontrer cette proposition, nous allons évaluer l'amplitude totale de la courbe décrite par le rayon de lumière, dans le cas de la réfraction horisontale, où elle est la plus grande possible. Nous prouverons ensuite que toute cette amplitude, vue du centre d'un astre, ne soutendrait qu'un angle extrêmement petit, et comme insensible, même quand cet astre serait la lune, celui de tous les corps célestes le plus rapproché de nous.

Soit donc TE (*fig.* 90) la direction primitive et rectiligne du rayon lumineux qui commence à se courber en E, en entrant dans l'atmosphère. La densité de l'air sera nulle au point E. Désignons par M le point le plus bas de la trajectoire, celui où sa tangente est

Digitized by Google

horisontale, et supposons que la densité de l'air y soit celle qui convient à la température de la glace fondante, et sous la pression de $0^m,76$. Enfin, supposons que C étant le centre de la terre, et CM son rayon, que nous nommerons a, on ait $CE = r = a + \frac{1}{100} . a$; de sorte que la hauteur du point E, au-dessus de la surface de la terre, soit égale à $\frac{1}{100}$ du rayon terrestre. Si cette élévation n'est pas la limite de l'atmosphère, du moins nous pouvons être sûrs que la densité de l'air y est extrêmement petite; car d'après ce qu'on a vu dans la page 26, le mercure du baromètre ne s'y soutiendrait pas à un millimètre de hauteur. Avec ces données, la théorie des réfractions fait connaître l'angle HEA, que la direction primitive du rayon lumineux forme avec l'horisontale EH, menée du point E perpendiculairement au rayon CE. Cet angle, que nous nommerons I, est réellement la dépression apparente de l'horison pour un observateur placé en E. Maintenant, du point M menez l'horisontale Mh perpendiculaire à CM, et la droite MT' parallèle à la direction primitive du rayon lumineux; l'angle hMT' sera la réfraction horisontale que nous nommerons R. Or, puisque la trajectoire est symétrique autour du point M, si S est le point où elle sort de l'atmosphère, les arcs ME, MS seront égaux, et la corde ES sera aussi perpendiculaire à CM, par conséquent parallèle à l'horisontale Mh. Les angles hMT', hEQ seront donc égaux entre eux, comme opposés dans un même parallélogramme, ainsi l'on aura $hEQ = R$; or, par ce qui précède, on a nommé $HEA = I$, on aura donc $HEQ = I + R$. De plus l'angle au centre ECM étant égal à HEQ, on aura encore $ECM = I + R$; par conséquent, la demi-corde EQ, qui est égale à $CM \sin ECM$, aura pour valeur $r \sin (I + R)$, et la corde entière ES sera $2r \sin (I + R)$. Maintenant, si du point de sortie S on tire la perpendiculaire SP sur la direction primitive du rayon de lumière, on aura $PS = ES \sin PES = 2r . \sin (I + R) \sin R$. Or l'astre étant situé sur le prolongement du rayon ET, toute la trajectoire ES, vue du centre de l'astre, se projettera sur la ligne PS, et en nommant D la distance de l'astre au point P, elle soutendra un angle visuel, dont la tangente trigonométrique sera $\frac{PS}{D}$ ou $\frac{2r \sin (I + R) \sin R}{D}$; formule dans laquelle on peut, sans erreur

Digitized by Google

sensible, employer pour D la distance de l'astre au centre de la terre; à cause de la petitesse du numérateur et du peu de différence de cette distance avec la distance D.

Il ne reste plus qu'à évaluer les diverses parties de cette formule en nombres, afin de voir si la quantité qu'elle exprime peut devenir sensible. Pour cela, nous commencerons par rappeler l'expression de l'angle I, telle qu'elle est donnée par la théorie des réfractions, et telle qu'elle se trouve dans la Mécanique céleste. Généralement, si l'on nomme ρ la densité de l'air à un point quelconque de la trajectoire, dont la distance au centre de la terre est r; de même, si l'on nomme (ρ) la densité de l'air au point le plus bas M de la trajectoire; et enfin si l'on désigne par $[\rho]$ la densité de l'air à la température de la glace fondante, sous la pression de $0^m,76$, la valeur de l'angle I est donnée par la formule

$$\text{tang}\, I = \frac{r}{a}\sqrt{\frac{(r+a)(r-a)}{r^2} - 2\alpha\left\{\frac{(\rho)}{[\rho]} - \frac{\rho}{[\rho]}\right\}},$$

où α est un nombre constant et égal à 0,000294011. Cette formule donne la dépression apparente de l'horison pour toutes les élévations, au lieu que celle de la page 225 ne convient qu'à des hauteurs très-petites. Dans le cas que nous voulons considérer, on a $\rho = 0$, $(\rho) = [\rho]$; $r = a + \frac{1}{100}.a$; par conséquent, la valeur numérique de tang I est

$$\text{tang}\, I = 1{,}01\sqrt{\tfrac{99201}{1{,}0201}\; 0{,}000588022};$$

d'où l'on tire

$$I = 7^\circ.\,57'.$$

ce serait la dépression apparente de l'horison pour un observateur élevé au-dessus de la surface de la terre d'une quantité égale à $\frac{1}{100}$ du rayon terrestre.

Il nous faut maintenant connaître la réfraction horisontale R. Nous supposerons $R = 35'$ sexagésimales, ce qui est une des plus grandes valeurs qu'elle puisse avoir dans l'état ordinaire de l'atmosphère. Je dis dans l'état ordinaire, car d'après ce que l'on a vu dans le chapitre des réfractions, il peut arriver des circonstances extraordinaires où la réfraction acquierre des valeurs beaucoup plus considérables, et alors la courbure de la trajectoire ne peut plus être supposée très-

Digitized by Google

petite. Mais ces états de l'air ne peuvent constituer un équilibre stable ; et par conséquent les effets qui en résultent ne peuvent être qu'accidentels et passagers ; bornons-nous donc à la valeur précédente de R, nous aurons $I + R = 8^{\circ}.32'$. L'angle visuel soutendu au centre de l'astre sera le plus grand possible pour la lune, qui est le moins éloigné des corps célestes ; il suffira donc de le calculer relativement à cet astre ; alors, on aura $D = 60.a$, parce que la distance moyenne de la lune à la terre est égale à 60 rayons terrestres ; alors, tout est connu dans la formule, et l'angle visuel soutendu par l'amplitude totale de la trajectoire lumineuse, a pour tangente trigonométrique

$$2{,}02 \,.\, \frac{\sin 8^{\circ}.32' \,.\, \sin 35'}{60} ;$$

résultat qui, étant évalué par les tables trigonométriques, répond à un angle de 10″ sexagésimales ; ainsi, deux rayons visuels menés du centre de la lune aux deux extrémités E, S, de la trajectoire, feraient entre eux un angle de 10″ ; par conséquent, toutes les autres lignes menées d'un point quelconque de la trajectoire à la lune, feraient entre elles des angles encore plus petits, puisqu'elles seraient toutes comprises dans l'angle visuel précédent. Relativement au point Q, par exemple, l'angle soutendu au centre de l'astre ne serait plus que moitié du précédent, c'est-à-dire, de 5″, et il serait encore moindre pour l'observateur qui n'est pas placé sur la corde au point Q, mais au point M sur la trajectoire. Enfin ces petites erreurs, déja peu sensibles sur la réfraction horisontale, qui est d'ailleurs soumise à tant d'autres incertitudes, deviendraient tout-à-fait insensibles à une moindre distance de la lune au zénith, et à plus forte raison le seraient-elles pour les autres astres qui sont bien plus éloignés. On pourra donc, sans craindre aucune erreur sensible, négliger absolument les angles que les différens rayons visuels forment au centre de l'astre et les supposer parallèles entre elles, d'autant mieux que, dans le précédent calcul, nous avons choisi exprès toutes les circonstances qui pouvaient contribuer le plus à augmenter leur inclinaison mutuelle.

Digitized by Google

NOTE V.

Détermination du coefficient de la Réfraction astronomique, d'après des observations d'étoiles circompolaires.

Pour effectuer cette détermination, il faut emprunter de la théorie l'expression de la réfraction atmosphérique, et déterminer les coefficiens constans que cette expression renferme, de manière à satisfaire aux observations d'étoiles faites au-dessus et au-dessous du pôle.

Soit Z la distance zénithale observée sous la pression barométrique p, et à la température t, la première étant exprimée en parties du mètre, et la seconde en degrés du thermomètre centésimal. L'auteur de la Mécanique céleste a prouvé, dans cet ouvrage, que pour des hauteurs apparentes plus grandes que 12° décimaux, la valeur de la réfraction r, exprimée en secondes de degré, est donnée par la formule suivante, dans laquelle α désigne un coefficient constant, exprimant des secondes de degré,

$$(1)\ldots\ldots r = \frac{\alpha . p . \tang Z}{0{,}76 . \left\{1 + t . 0{,}00375\right\}} - \frac{\alpha p}{0{,}76} . 0{,}00125254 \frac{\tang Z}{\cos^2 Z}$$
$$+ \frac{\frac{1}{2}\alpha^2 \sin 1'' . p^2}{\left[0{,}76\left\{1 + t . 0{,}00375\right\}\right]^2} \frac{\left\{1 + 2\cos^2 Z\right\} \tang Z}{\cos^2 Z}.$$

Tout est connu dans cette formule, excepté le coefficient α. Il ne reste donc plus qu'à voir comment les observations des étoiles circompolaires peuvent servir à le déterminer.

Pour cela, soit Z la distance d'une de ces étoiles au zénith dans son passage au méridien supérieur; Z' cette distance pour le méridien inférieur, observée du même point de la surface terrestre. Les réfractions r, r', correspondantes à ces deux distances, pourraient être calculées d'après la formule précédente, si l'on connaissait le coefficient α. Mais ne le connaissant point, on peut toujours calculer les autres coefficiens numériques qui le multiplient dans la formule, et qui ne dépendent que de la distance au zénith, de la pression et de la

Digitized by Google

température, toutes quantités données par l'observation ; on aura donc ainsi, pour r et r', des expressions de cette forme

$$r = A\alpha + B\alpha^2, \qquad r' = A'\alpha + B'\alpha^2;$$

dans lesquelles A, B, A', B', désignent des nombres connus; ainsi les distances zénithales vraies corrigées de ces réfractions, seront exprimées par

$$Z + A\alpha + B\alpha^2, \qquad Z' + A'\alpha + B'\alpha^2.$$

Si ces distances sont bien corrigées, leur demi-somme doit donner la vraie distance du pôle au zénith, distance que nous nommerons D. On aura donc, en les ajoutant,

$$(2) \ldots\ldots Z + Z' + \left\{A + A'\right\}\alpha + \left\{B + B'\right\}\alpha^2 = 2D.$$

Dans cette équation, il n'y a d'inconnue que α et D; chaque étoile observée au-dessus et au-dessous du pôle, donnera une équation semblable; et comme α et D restent les mêmes pour toutes les étoiles, il s'ensuit que deux équations de ce genre suffiront pour les déterminer, c'est-à-dire, pour faire connaître la distance vraie du pôle au zénith, et le coefficient α de la réfraction; alors, cette formule ne contenant plus rien d'indéterminé, on pourra calculer sa valeur pour toutes les distances zénithales, de degré en degré, et en former des tables de réfraction.

L'équation que nous avons trouvée entre α et D, suppose que la distance polaire de chaque étoile est la même dans le passage supérieur et dans le passage inférieur. Or, ces distances varient sans cesse par l'effet de la précession, de l'aberration, de la nutation; il faut donc, pour les rendre comparables entre elles, les dépouiller de ces effets, ou au moins corriger les variations qui ont dû en résulter dans les distances zénithales pendant l'intervalle de tems où les observations ont été faites; c'est ce que l'on appelle *réduire des observations à une même époque*. Par ce moyen, on acquiert l'avantage de pouvoir réunir un grand nombre d'observations de chaque passage, et de les faire concourir toutes au calcul de α, ce qui donne à leur détermination une plus grande probabilité d'exactitude.

Pour entrer à fond dans le détail de ces réductions, supposons que les observations dont on fait usage aient été faites avec un cercle

Digitized by Google

répétiteur. Dans ce cas la distance moyenne observée Z ne sera pas la distance méridienne; elle aura besoin d'une correction δ pour être réduite au méridien. S'il s'agit d'un passage supérieur, cette correction sera soustractive, et $Z - \delta$ sera la distance méridienne; mais la réfraction r devra toujours être calculée pour la distance observée Z, de sorte que $Z - \delta + r$ sera la distance méridienne vraie. Si donc on représente par Δ la distance polaire de l'étoile, calculée pour le jour de l'observation, cette distance, ajoutée à la distance méridienne, donnera la vraie distance du pôle au zénith, puisqu'il s'agit d'un passage supérieur. On aura donc ainsi

$$Z - \delta + r + \Delta = D.$$

Si l'on représente par Z', δ', r' et Δ' les quantités analogues pour le passage inférieur, la réduction au méridien δ' sera additive à la distance zénithale; mais Δ' sera soustractive, et l'on aura

$$Z' + \delta' + r' - \Delta' = D.$$

Ajoutant ces deux équations relatives aux deux passages de la même étoile, on trouve

$$Z + Z' + r + r' + \delta' - \delta + \Delta - \Delta' = 2D;$$

ou en mettant pour r et r' leurs valeurs

$$Z + Z' + \left\{A + A'\right\}\alpha + \left\{B + B'\right\}\alpha^2 + \delta' - \delta + \Delta - \Delta' = 2D. \ldots (3)$$

Si les deux observations étaient faites au méridien même, on aurait $\delta = 0$, $\delta' = 0$; si, de plus, la distance polaire était la même dans les deux observations, on aurait $\Delta = \Delta'$. Avec ces modifications on retomberait sur la formule que nous avons trouvée d'abord; mais celle que nous venons de former est plus générale, puisqu'elle permet d'employer des observations qui ne sont pas immédiatement comparables; et même, par cette raison, cette dernière formule est la seule qui puisse être appliquée, puisque l'exacte identité des circonstances ne se rencontre presque jamais dans deux observations. Remarquons en outre que les distances polaires Δ Δ' n'ont pas besoin d'être connues avec une grande précision; il suffit d'avoir leurs valeurs, assez approchées pour pouvoir calculer très-exactement les variations

Digitized by Google

qu'elles ont éprouvées entre les époques des observations de l'un et l'autre passage.

Maintenant, nous allons appliquer cette formule à des observations faites par Méchain, à Barcelonne. Ces observations rapportées dans l'ouvrage de M. Delambre sur la méridienne, sont nombreuses, et paraissent faites avec un très-grand soin. Je n'ai rapporté ici que les moyennes de ces observations, et cela suffit; car chacune de ces moyennes peut être considérée comme une observation plus exacte qu'aucune des observations particulières, et qui aurait été faite dans l'état moyen de température et de pression barométrique qui convient à l'ensemble des observations; de plus, j'ai rapporté les observations de trois étoiles, quoique deux eussent suffi à la rigueur; mais la combinaison des trois donnera une plus grande probabilité d'exactitude et une plus grande chance de succès : cela posé, voici les élémens donnés par l'observation.

	α Polaire.	β de la petite Ourse.	ζ de la grande Ourse.
Distance au zénith observée dans le passage supérieur.....Z.	46°.49′. 0″.40	33°.36′.29″.26	14°.38′. 6″.19
Thermomètre centésimal.....t.	+ 10°.36	+ 7°.96	+ 5°.69
Baromètre.....p.	0, 7609	0, 7680	0, 7645
Distance au zénith observée dans le passage inférieur.....Z'.	50°.23′.10″.75	63°.35′.16″.18	82°.29′.46″.50
Thermomètre centésimal.....t'.	+ 4°.25	+ 8°.45	+ 7°.79
Baromètre.....p'.	0, 7576	0, 7649	0, 7605
Dist. sup. réd. au mér., plus la dist. polaire .....$Z-\delta+\Delta$.	48°.36′.11″.95	48°.36′.33″.10	48°.37′. 1″.26
Dist. inf. réd. au mér. moins la dist. polaire .....$Z'+\delta'-\Delta'$.	48°.36′. 1″.28	48°.35′.15″.01	48°.30′.14″. 9
Somme $Z+Z'+\delta'-\delta+\Delta-\Delta'$.	97°.12′.13″.23	97°.11′.48″.11	97°. 7′.15″.35

Digitized by Google

Il ne reste plus maintenant qu'à calculer les coefficiens numériques de la formule des réfractions, pour chacune des valeurs précédentes de Z et de Z'; on trouve ainsi pour r et r' les valeurs suivantes, relativement à chaque étoile,

Polaire supérieure. . . . . $r = 1{,}023980 . \alpha + 0{,}000009917 . \alpha^2$

inférieure . . . . . $r' = 1{,}182513 . \alpha + 0{,}000012572 . \alpha^2$

d'où l'on tire . . . $r + r' = 2{,}206493 . \alpha + 0{,}000022489 . \alpha^2$

β supérieure . . . . . $r = 0{,}650829 . \alpha + 0{,}000005336 . \alpha^2$

inférieure . . . . . $r' = 1{,}951304 . \alpha + 0{,}000032755 . \alpha^2$

d'où l'on tire . . . $r + r' = 2{,}602133 . \alpha + 0{,}000038091 . \alpha^2$

ζ supérieure. . . . . $r = 0{,}254218 . \alpha + 0{,}000001883 . \alpha^2$

inférieure . . . . . $r' = 6{,}823015 . \alpha + 0{,}001054850 . \alpha^2$

d'où l'on tire . . . $r + r' = 7{,}077233 . \alpha + 0{,}001056733 . \alpha^2$

En combinant chacune de ces valeurs de $r + r'$ avec celles de $Z - \delta + \Delta$ et de $Z' + \delta' - \Delta'$ que nous avons données plus haut, on formera entre α et D les trois équations suivantes analogues à l'équation (3),

$$97^\circ . 12' . 13'' . 23 + 2{,}206493\, \alpha + 0{,}000022489\, \alpha^2 = 2\, D$$
$$97^\circ . 11' . 48'' . 11 + 2{,}602133\, \alpha + 0{,}000038091\, \alpha^2 = 2\, D$$
$$97^\circ . 7' . 15'' . 35 + 7{,}077233\, \alpha + 0{,}001056733\, \alpha^2 = 2\, D$$

Ces équations ne contenant plus d'inconnues que α et D, il sera facile d'en tirer les valeurs de ces quantités par l'élimination; mais comme nous avons plus d'équations que d'inconnues, le calcul peut se faire de plusieurs manières différentes, suivant les équations qu'on voudra combiner ensemble. Faisons d'abord usage des deux premières; en les retranchant l'une de l'autre, D sera éliminé, et il viendra cette équation du second degré en α,

$$-25'',12 + 0{,}395640\, \alpha + 0{,}000015602\, \alpha^2 = 0;$$

de là on tirerait, par la résolution, deux valeurs de α, l'une positive, l'autre négative; mais la première est la seule qui nous intéresse,

Digitized by Google

puisque dans l'état ordinaire de l'atmosphère, tel que celui où les observations ont été faites, la réfraction est essentiellement positive. Mais sans résoudre rigoureusement l'équation précédente, la valeur de α peut s'obtenir d'une manière suffisamment approchée, car en divisant tous les membres par 0,395640, on a

$$\alpha = 63'',492 - 0,000039435 . \alpha^2.$$

La première partie de cette valeur est incomparablement la plus considérable, à cause de l'extrême petitesse du coefficient de α^2; il suffira donc de calculer le second terme, en substituant au lieu de α sa valeur approchée 63″,492; de cette manière, on trouve

$$\alpha = 63'',492 - 0'',159 = 63'',333,$$

et par suite, en mettant pour α cette valeur dans l'une des équations dont nous avons fait usage, par exemple, dans la première, on trouve

$$97^\circ . 12' . 13'' . 23 + 2' . 19'' . 744 + 0'' . 090 = 2D;$$

ce qui donne

$$D = 48^\circ . 37' . 16'' . 532.$$

La combinaison que nous venons de faire n'est pas la plus propre à déterminer α; car à cause de la petitesse du coefficient 0,393640, qui sert ici de diviseur, les plus petites erreurs qui peuvent se trouver dans le terme 25″,12, y sont presque triplées par la division : mais cette combinaison est très-propre à déterminer D; car la petitesse du coefficient 2,206493, qui multiplie α dans la première équation, fait qu'une petite erreur sur cette quantité ne se trouve point fort agrandie dans la valeur de D; au contraire, la troisième équation donnée par ζ ne serait pas du tout propre à déterminer D; car, à cause du coefficient considérable 7,077233, les erreurs commises sur la réfraction s'y trouveraient beaucoup plus agrandies; mais en revanche, la grandeur de ce coefficient rend la troisième équation très-propre à déterminer α en supposant D connu, parce que les petites erreurs qui pourront se trouver dans $2D$, deviendront sept fois plus petites par la division. Substituant donc pour

Digitized by Google

$2D$ sa valeur $97^{\circ}.14'.33''.064$, telle que les deux premières équations nous l'ont donnée, nous aurons pour déterminer α,

$$7{,}077233\,\alpha + 0{,}00105649 3\,\alpha^2 = 437''.714\,;$$

ou, en divisant tout par le coefficient de α,

$$\alpha = 61'',848 - 0{,}00014931.\alpha^2\,;$$

et, en résolvant cette équation par approximation, comme nous l'avons fait tout-à-l'heure, on trouve

$$\alpha = 61'',848 - 0'',571 = 61'',277.$$

Cette valeur de α devant être regardée comme plus exacte que la première, il faut l'introduire dans les équations relatives à la polaire et à β de la petite Ourse, afin d'en déduire la vraie valeur de D. On trouve, en effectuant ce calcul,

Par la polaire	$D = 48^{\circ}.37'.13''.795$
Par β	$D = 48^{\circ}.37'.13''.852$
Moyenne.	$D = 48^{\circ}.37'.13''.820$
Et par conséquent. . .	$2D = 97^{\circ}.14'.27''.646$

Comme cette valeur de $2D$ diffère assez sensiblement de celle que nous avons d'abord employée, il est bon de la substituer de nouveau dans l'équation donnée par ? ; car les différences qu'elle a subies pourront apporter, dans la valeur de α, quelque modification. En effet, en effectuant cette substitution, et achevant le calcul comme tout-à-l'heure, on trouve

$$7{,}077233\,\alpha + 0{,}00105649 3\,\alpha^2 = 432{,}296\,,$$

d'où l'on tire

$$\alpha = 61{,}082 - 0{,}00014931\,\alpha^2\,,$$

et enfin

$$\alpha = 61'',082 - 0'',557 = 60'',525.$$

Cette nouvelle valeur de α, substituée de nouveau dans les équations

Digitized by Google

relatives à la polaire et à β, donne

$$\begin{aligned} &\text{Par la polaire} \ldots\ldots D = 48^\circ.37'.13''.430 \\ &\text{Par } \beta \ldots\ldots\ldots D = 48^\circ.37'.12''.846 \\ \hline &\text{Moyenne} \ldots\ldots\ldots D = 48^\circ.37'.13''.138 \\ &2D = 97^\circ.14'.26''.276 \end{aligned}$$

Cette valeur de $2D$ diffère trop peu de celle que nous venons d'employer, pour qu'il soit nécessaire de recommencer le calcul de α; car elle diminuerait tout au plus α de $\frac{10}{100}$ de seconde, quantité dont nous ne pouvons pas répondre, et qui peut être comportée par les erreurs des observations. Pour nous en convaincre, il suffira de calculer la valeur de D, donnée par l'équation en ζ, en employant cette valeur de α que nous venons d'obtenir, c'est-à-dire, $\alpha = 60'',525$; on trouve ainsi

$$2D = 97^\circ.7'.15''.350 + 7'.8''.897 = 97^\circ.14'.24''.247,$$

ce qui donne

$$D = 48^\circ.37'.12''.123.$$

Cette valeur est si peu différente de la moyenne donnée par β et par la polaire, que l'on a lieu d'être surpris d'un si parfait accord, et l'on en peut conclure que si notre valeur de α n'est pas encore tout-à-fait exacte, du moins elle est extrêmement approchée de la véritable. J'ai annoncé dans la page 211, que celle-ci est $60'',666$, suivant M. Delambre et suivant les expériences directes faites par Arago et moi.

Au reste, on doit sentir par ce qui précède, que si l'on voulait réunir les circonstances les plus favorables à la détermination de α, il faudrait observer des étoiles circompolaires encore plus basses que ζ, dans un lieu dont la latitude aurait été préalablement déterminée par des observations de β et de la polaire; car comme le coefficient de α augmente rapidement à mesure que la distance zénithale augmente, il devient bientôt assez considérable pour atténuer, par la division, les petites erreurs que l'on peut commettre sur la latitude et sur la distance D du pôle au zénith, lorsqu'on les suppose calculées avec des valeurs de α déja à-peu-près exactes. Mais pour

Digitized by Google

des étoiles ainsi observées très-près de l'horison, l'expression approchée des réfractions dont nous avons fait usage n'est plus suffisamment exacte, et il faut employer les formules plus rigoureuses qui ont été données par l'auteur de la Mécanique céleste; même il eût déja été convenable d'employer ces formules dans le calcul des observations de ?; car c'est sans doute à cela qu'est due la petite différence des valeurs de D données par cette étoile et par les deux autres, différence qui, au reste, n'a aucune influence sensible sur la valeur de α déduite de cette équation, son effet étant atténué et rendu insensible par la grandeur du coefficient de α qui lui sert de diviseur.

Au lieu d'observer des étoiles circompolaires très-basses, qui se voient difficilement dans leur passage inférieur, on pourrait, avec avantage, déterminer α par des observations du soleil, faites au cercle répétiteur, près du lever ou du coucher de cet astre, dans un lieu dont la latitude serait préalablement déterminée d'une manière aussi approchée que possible. En choisissant, pour les observations, l'époque du solstice d'été, comme alors le soleil à midi est fort élevé sur l'horison, on pourra observer sa distance méridienne au cercle répétiteur, et la réduire en distance méridienne vraie, sans qu'une petite erreur sur les réfractions y ait beaucoup d'influence : de là, et d'après la latitude supposée connue, on conclura la distance polaire de cet astre; ensuite, avec cette distance, avec celle du pôle au zénith et l'angle horaire observé à l'époque des séries du matin ou du soir, on calculera sa distance zénithale vraie pour l'époque des observations, et en retranchant la distance zénithale observée, le reste sera la réfraction pour cette hauteur. C'est ainsi que, par un grand nombre d'observations faites à Bourges, et combinées avec des observations de Piazzi à Palerme, M. Delambre à trouvé le coefficient $\alpha = 60,666$, valeur que nous avons trouvée aussi, Arago et moi, par des expériences directes sur la force réfringente de l'air. On conçoit d'ailleurs que pour des calculs semblables, où l'on se sert d'observations faites très-près de l'horison, il faut employer l'expression rigoureuse, telle qu'elle se trouve dans la Mécanique céleste, et non pas la formule approchée qui nous a servi d'exemple.

Il me reste maintenant à faire voir comment α étant connu, l'expression de la réfraction peut se mettre sous la forme que nous lui avons donnée dans la page 211. Pour cela, nous reprendrons

la formule primitive d'où nous sommes partis, et en y faisant $t = 0'$, $p = 0{,}76$, ce qui la ramène aux circonstances de la page 211, nous aurons

$$r = \alpha \operatorname{tang} Z \left\{ 1 - \frac{0{,}00125254}{\cos^2 Z} \right\} + \tfrac{1}{2} \alpha^2 \sin 1''. \frac{\left\{ 1 + 2\cos^2 Z \right\}}{\cos^2 Z} \operatorname{tang} Z.$$

Si, dans cette équation, nous mettons pour $\cos^2 Z$ sa valeur.... $\frac{1}{1 + \operatorname{tang}^2 Z}$, nous réduirons aussi tout en tangentes, et nous aurons

$$r = \left\{ 0{,}99874746 + \frac{3\alpha}{2} \sin 1'' \right\} \alpha \operatorname{tang} Z - \left\{ 0{,}00125254 - \frac{\alpha}{2} \sin 1'' \right\} \alpha \operatorname{tang}^3 Z;$$

dans les termes qui contiennent $\alpha \sin 1''$, substituons pour α sa valeur 60,525 que nous avons obtenue; par ce moyen, tout ce qui est entre les parenthèses deviendra numérique. Or, en effectuant cette substitution, on trouve

$$\alpha \sin 1'' = 0{,}000293434,$$

et de là on conclut

$$r = 0{,}99918761 \,.\, \alpha \operatorname{tang} Z - 0{,}001105823 \,.\, \alpha \,.\, \operatorname{tang}^3 Z.$$

Pour convertir cette expression en une autre de la forme

$$r = A \operatorname{tang} \left\{ Z - nr \right\},$$

A et n étant deux constantes, développons cette dernière suivant les puissances de tang Z. A cet effet, supposons d'abord $Z = 90°$, et nommons R la valeur de r qui y correspond; ce serait la réfraction horisontale, si une semblable formule pouvait s'étendre jusqu'à l'horison; nous aurons donc ainsi

$$R = A \operatorname{tang} \left\{ 90 - nR \right\} = \frac{A}{\operatorname{tang} nR};$$

d'où l'on tire

$$A = R \operatorname{tang} nR;$$

et en substituant cette valeur à la place du coefficient A, dans

Digitized by Google

l'équation générale, elle devient

$$r = R \text{ tang } nR \text{ tang } \{Z - nr\};$$

ou, en multipliant les deux membres par n,

$$nr = nR \text{ tang } nR \text{ tang } \{Z - nr\},$$

dans laquelle il n'y a plus que nr d'inconnue. Pour la dégager, il faut faire attention que dans l'état ordinaire de l'atmosphère, les réfractions, même horisontales, ne surpassent guère 1980″ ou 33′ sexagésimales; de plus, on verra, par la suite du calcul, que le coefficient n est peu différent de $3\frac{1}{4}$; par conséquent, la plus grande valeur des arcs nR, nr n'atteindra pas 2° sexagésimaux. Or le sinus d'un arc de 2° ne diffère de sa tangente que de $\frac{1}{1640}$ de sa valeur totale; par conséquent, la différence de l'arc lui-même à la tangente est encore moindre. On peut donc ici, sans craindre aucune erreur sensible, substituer au rapport des arcs nr, nR, celui de leurs tangentes ou de leurs sinus, comme nous l'avons fait dans le calcul des parallaxes, page 245; nous aurons ainsi,

$$\text{tang } nr = \text{tang}^2 nR \,.\, \text{tang } \{Z - nr\}.$$

Pour dégager tang nr, développons l'expression de tang $\{Z - nr\}$, qui est $\frac{\text{tang } Z - \text{tang } nr}{1 + \text{tang } Z \text{ tang } nr}$; et en multipliant les deux membres de l'équation par $1 + \text{tang } Z \text{ tang } nr$, afin de faire disparaître les dénominateurs, nous aurons, pour déterminer tang nr, cette équation du second degré

$$\text{tang } Z \text{ tang}^2 nr + \{1 + \text{tang}^2 nR\} \text{ tang } nr = \text{tang}^2 nR \,.\, \text{tang } Z,$$

qui étant résolue par rapport à tang nR, donne

$$\text{tang } nr = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4 \sin^2 nR \cos^2 nR \text{ tang}^2 Z}}{2 \cos^2 nR \text{ tang } Z}.$$

Le signe supérieur du radical est le seul que l'on doive prendre, car il faut toujours que la réfraction r soit positive, quelle que soit

Digitized by Google

la distance apparente au zénith; de plus, à moins que cette distance ne soit très-considérable, et même peu différente de 90°, le second terme de la quantité comprise sous le radical sera une fraction moindre que l'unité, et, par conséquent, le radical pourra être réduit en série convergente, au moyen de la formule du binome. Il suffit, pour cela, que Z soit plus petit que $90 - 2nR$; car s'il était même égal à $90° - 2nR$, on aurait $\tang Z = \tang 2nR = \frac{\cos 2nR}{\sin 2nR}$, et en substituant cette valeur, dans le radical, à la place de $\tang Z$, le second terme se réduit à $\cos^2 2nR$, qui est une fraction moindre que l'unité. Nous aurons soin, dans ce qui va suivre, de ne considérer que des distances zénithales beaucoup moindres que la précédente; alors effectuant le développement du radical en série, et ne conservant que le signe supérieur, nous aurons

$$\tang nr = \sin^2 nR \tang Z - \sin^4 nR \,.\, \cos^2 nR \tang^3 Z$$
$$+ 2 \sin^6 nR \cos^4 nR \tang^5 Z - \text{etc.}$$

Maintenant que notre inconnue est dégagée, nous pouvons, conformément à la méthode d'approximation que nous avons adoptée, substituer à $\frac{\tang nr}{\tang nR}$ le simple rapport des arcs $\frac{r}{R}$, ou, ce qui revient au même, écrire à la place de $\tang nr$, l'expression.... $\frac{r \tang nR}{R}$; alors la série précédente donne

$$r = \frac{R}{2} \sin 2nR \tang Z - \frac{R}{8} \,.\, \sin^3 2nR \,.\, \tang^3 Z$$
$$+ \frac{R}{16} \,.\, \sin^5 2nR \,.\, \tang^5 Z - \ldots\ldots \text{etc.}$$

Cette série converge d'autant plus rapidement que Z est moindre. Si l'on suppose, comme cela a lieu dans la nature, $R = 32'$, $n = 3 \,.\, \frac{1}{4}$, et que l'on prenne $Z = 74°$, le troisième terme ne vaudra que des centièmes de secondes : il ne vaut pas $2''$ quand $Z = 82°$. Ainsi, en n'étendant la série qu'à des distances zénithales comprises entre zéro et les limites précédentes, nous pourrons borner la série à ses deux premiers termes; alors, elle sera comparable à

Digitized by Google

l'expression

$$r = 0{,}99918761 . \alpha \text{ tang } Z - 0{,}001105823 \, \alpha \text{ tang}^3 Z ,$$

que nous avons trouvée à-peu-près dans les mêmes limites; et en les comparant terme à terme, on aura

$$\frac{R}{2} \sin 2\, nR = 0{,}99918761 . \alpha ; \quad \frac{R}{8} \sin^3 2\, nR = 0{,}001105823 . \alpha .$$

Ces deux conditions suffisent pour déterminer R et n; car divisant la seconde par la première, on en tire d'abord

$$\sin 2\, nR = 2 \sqrt{\frac{0{,}001105823}{0{,}99918761}} ,$$

et ensuite, à l'aide de cette valeur, on a

$$R = 0{,}99918761 . \alpha . \sqrt{\frac{0{,}99918761}{0{,}001105823}} .$$

La première de ces expressions fera connaître $2\, nR$, la seconde R; en divisant l'une par l'autre, on aura n; quant au coefficient constant A, qui multiplie toute la formule, comme on a

$$A = R \text{ tang } nR ,$$

quand R et nR seront connues, il le sera pareillement. On doit observer que ce coefficient est extrêmement peu différent de α; car si l'on négligeait la différence de sin R à tang nR, on pourrait prendre

$$A = R \sin nR = \frac{R}{2} \sin 2\, nR = 0{,}99918761 . \alpha .$$

Si l'on effectue ces calculs numériques en mettant pour α la valeur 60″,525, que nous avons trouvée plus haut, il vient

$$nR = 6867'' , \quad R = 1817'' , 9 , \quad n = 3{,}78 , \quad A = 60'' , 510 ;$$

et ces valeurs étant reportées dans la formule primitive, elle

Digitized by Google

devient

$$r = 60'',510 \text{ tang } \{Z - 3,78 . r\}.$$

Ce résultat, déduit uniquement des observations de Méchain, que nous avons calculées, approche extrêmement de celui qu'a donné M. Laplace, et qui est

$$r = 60'',666 \text{ tang } \{Z - 3,25 . r\}.$$

Mais on conçoit que ce dernier mérite plus de confiance à cause du grand nombre d'observations physiques et astronomiques qui ont concouru à en déterminer les coefficiens numériques.

Les nombres que nous venons d'obtenir sont relatifs à la température de la glace fondante et à la pression barométrique de $0^m,76$. Pour rendre la formule applicable à d'autres circonstances où la pression serait p et la température t, M. Laplace prescrit de multiplier le coefficient 60,666, ou α, par le rapport des densités de l'air dans ces deux circonstances, c'est-à-dire, par $\frac{p}{0,76\{1 + t.0,00375\}}$. On verra facilement la raison de cette réduction, si l'on se reporte à l'expression de la réfraction que nous avons rapportée au commencement de cette note, et que nous avons annoncée comme applicable à tous les états de l'air. Dans tous les termes de cette formule, excepté dans le second, le coefficient α se trouve multiplié par le facteur $\frac{p}{0,76\{1 + t.0,00375\}}$, qui se trouve élevé aux mêmes puissances. A la vérité, le second terme fait exception à cette règle; car α ne s'y trouve multiplié que par le rapport des pressions atmosphériques $\frac{p}{0,76}$; mais comme le coefficient numérique de ce terme 0,00125254 est extrêmement petit, on peut, sans inconvénient, lui appliquer aussi le dénominateur $\frac{1}{1 + t.0,00375}$, qui, dans les températures ordinaires où l'on observe, est très-peu différent de l'unité. Alors α se trouve partout joint au facteur . . . . $\frac{p}{0,76\{1 + t.0,00375\}}$, et, par conséquent, il suffira de faire varier

Digitized by Google

α de cette manière dans la formule

$$r = 60{,}666 \text{ tang } \left\{ Z - 3{,}25 \,.\, r \right\},$$

qui n'est qu'une transformation de la première, et dans laquelle le coefficient commun 60″,666 représente à fort peu près α.

On voit, au reste, que les deux formules ne sont exactement comparables entre elles qu'entre les limites $Z = 0$ et $Z = 74°$. Pour des distances zénithales plus considérables, elles doivent s'écarter l'une de l'autre, et donner des résultats différens. Dans ce cas, il est sûr que la formule approchée, déduite de la théorie, n'est plus applicable, puisqu'elle donnerait une réfraction horisontale infinie. Il n'en est pas ainsi de la seconde formule que nous en avons déduite, et dans laquelle les puissances de tang Z sont enveloppées dans le seul terme tang $\left\{ Z - 3{,}25\, r \right\}$. Celle-ci peut être étendue beaucoup plus bas, et même jusqu'à l'horison, sans qu'il en résulte d'erreur considérable; car la réfraction horisontale R qui en résulte et que nous avons trouvée de 1818″, ne s'écarte pas beaucoup de la véritable. Aussi cette formule, qui avait d'abord été trouvée empiriquement par les astronomes, a-t-elle été, jusqu'à ces derniers tems, généralement employée. Mais il est maintenant reconnu qu'à de petites hauteurs, cette formule n'est plus suffisamment exacte, et il faut alors recourir aux séries que M. Laplace a données, pour ces cas, dans la Mécanique céleste, et sur lesquelles sont calculées les nouvelles tables de réfractions qu'il a publiées. On les trouvera à la fin de notre troisième volume.

La formule

$$r = A \text{ tang } \left\{ Z - nr \right\},$$

ne se prête que difficilement au calcul de la réfraction r, parce que cette inconnue se trouve engagée dans les deux membres de l'équation; aussi, les astronomes l'ont-ils retournée de diverses manières, afin de la rendre plus commode : pour cela, il faut d'abord lui donner la forme

$$\text{tang } nr = \text{tang}^2\, nR \text{ tang } \left\{ Z - nr \right\}.$$

Ajoutons successivement aux deux membres de cette équation les

quantités $+\tang nr \tang^2 nR$, et $-\tang nr \tang^2 nR$, nous aurons

$$\tang nr \left\{ 1 + \tang^2 nR \right\} = \tang^2 nR \left\{ \tang \left\{ Z - nr \right\} + \tang nr \right\}$$
$$\tang nr \left\{ 1 - \tang^2 nR \right\} = \tang^2 nR \left\{ \tang \left\{ Z - nr \right\} - \tang nr \right\}$$

Divisant ces équations membre à membre, $\tang nr$ disparaîtra du premier, et il viendra, en réduisant,

$$\frac{1}{\cos 2nR} = \frac{\sin Z}{\sin \left\{ Z - 2nr \right\}};$$

d'où l'on tire,

$$\sin \left\{ Z - 2nr \right\} = \cos 2nR \,.\, \sin Z.$$

Lorsque Z sera donné, comme l'arc nR est connu, on pourra calculer la valeur numérique du second membre. On aura donc, par les tables trigonométriques, la valeur de l'arc $Z - 2nr$: en le retranchant de Z, on aura $2nr$, et enfin r en divisant par $2n$, qui est un nombre connu.

Mais quoique ce calcul puisse s'exécuter de cette manière, puisque l'inconnue nr ne se trouve plus que dans un seul membre, cependant il serait incommode à effectuer, parce que la réfraction étant donnée par la différence des deux arcs Z et $Z - 2nr$, qui peuvent être fort considérables, il faudrait calculer ces arcs avec une exactitude minutieuse pour avoir la réfraction r. On obtiendra un calcul plus simple en transformant l'éxpression de $\tang nr$, que nous avons trouvée plus haut, en résolvant l'équation du second degré ; cette expression était

$$\tang nr = \frac{-1 + \sqrt{1 + \sin^2 2nR \tang^2 Z}}{2 \cos^2 nR \tang^2 Z}.$$

Prenons un angle auxiliaire u, tel qu'on ait

$$\tang u = \sin 2nR \,.\, \tang Z;$$

et en éliminant $\tang Z$ au moyen de cette relation, l'expression de $\tang nr$ deviendra

$$\tang nr = \tang nR \,.\, \left\{ \frac{1 - \cos u}{\sin u} \right\};$$

Digitized by Google

et en mettant pour sin u et cos u les valeurs
$1 - 2\sin^2 \frac{1}{2} u$,

$$\text{tang } nr = \text{tang } nR \text{ tang } \tfrac{1}{2} u.$$

Quand z sera donné, la première équation don
conséquent u. Quand on connaîtra u, la second
ensuite r. Cette formule est d'une application t

NOTE SUR LA PAGE 29

Exemple d'un calcul du tems sydéral, d'a absolue d'étoile observée hors du

Soit Δ la distance polaire apparente de l'étoi
distance polaire affectée de la précession, de l'ab
tation; soit D la distance du pôle au zénith,
de la latitude du lieu où l'on observe; enfin, n
tance zénithale observée corrigée de la réfracti
horaire demandé. Avec ces données, on aura l'an
mule

$$\sin \tfrac{1}{2} P = \sqrt{\frac{\sin\left\{\frac{Z+\Delta-D}{2}\right\} \sin\left\{\frac{Z}{}\right.}{\sin \Delta \sin D}}$$

Voici un exemple de ce calcul appliqué à une obs
faite à Dunkerque, le 21 mars 1809, à la latitud
la hauteur du baromètre étant 0,76865, et le th
simal à + 6°.

La distance de Rigel au pôle boréal de l'équateu
Connaissance des tems, et réduite en position apparent
1809, est . . . . . $\Delta =$

L'ascension droite, réduite en tems pour le
même jour . . . . . $A =$

L'observation faite au cercle répétiteur, après le pas

Digitized by Google

méridien, a donné la distance apparente au zénith $70^\circ.45'.59''.21$

Correction du niveau . . . . . $-0''.47$

$70^\circ.45'.58''.74$

Réfraction calculée par les tables pour la pression barométrique et la température observée. $2'.50''.01$

Distance vraie de Rigel au zénith à l'instant moyen de l'observation . . . . . $Z = 70^\circ.48'.48''.75$

Avec ces données, on effectue le calcul ainsi qu'il suit :

$$\Delta = 98^\circ.26'.\ 8''.35$$
$$D = 38^\circ.57'.55''.00$$
$$\Delta - D = 59^\circ.28'.13''.35 \qquad 59^\circ.28'.13''.35$$
$$Z = 70^\circ.48'.48''.75 \qquad 70^\circ.48'.48''.75$$
$$Z + \Delta - D = 130^\circ.17'.\ 2''.10 \ . \quad Z + D - \Delta = 11^\circ.20'.35''.40$$
$$\frac{Z + \Delta - D}{2} = 65^\circ.\ 8'.31''.05 \ . \quad \frac{Z + D - \Delta}{2} = 5^\circ.40'.17''.70$$

$$\log \sin \left\{ \frac{Z + \Delta - D}{2} \right\} = 9{,}9577758 \qquad \log \sin \Delta = 9{,}9952758$$
$$\log \sin \left\{ \frac{Z + D - \Delta}{2} \right\} = 8{,}9948723 \qquad \log \sin D = 9{,}7985466$$
$$8{,}9526481 \qquad 9{,}7938224$$
$$9{,}7938224$$
$$\log \sin^2 \tfrac{1}{2} P = 9{,}1588257$$
$$\log \sin \tfrac{1}{2} P = 9{,}5794128$$
$$\tfrac{1}{2} P = 22^\circ.18'.48''.8$$
$$P = 44^\circ.37'.37''.6 = 2^h.58'.30''.51$$

Ascension droite apparente de Rigel, calculée et réduite en tems A . . . . . $5^h.\ 5'.22''.61$

Somme ou tems sydéral de l'observation. $8^h.\ 3'.53''.12$

Époque moyenne de la série en tems de la pendule . . . . . $5^h.46'.30''.28$

Retard de la pendule sur le tems sydéral à l'époque de l'observation de Rigel. . . $2^h.17'.22''.84$

Digitized by Google

Le calcul précédent suppose que l'on a su
polaire et l'ascension droite apparentes de Rig
l'observation. A cet effet, il faut connaître la préc
et la nutation de l'étoile pour ce même jour, afin d
à sa position moyenne. On verra dans le second
les déterminer.

Quant à la réfraction, on la prendra dans l
avons expliqué comment les tables sont formée
une dans le troisième volume, avec toutes les
saires aux calculs astronomiques usuels.

L'observation que nous venons de calculer av
passage de Rigel au méridien; et comme Rigel
trale qui n'est visible que dans son passage au
on voit que l'angle horaire P s'est trouvé naturell
du méridien supérieur, dans le sens du mouven
les conventions faites dans la page 128. C'est
avons ajouté l'ascension droite A pour avoir le
si Rigel eût été observé avant son passage au
fallu prendre le complément de P, afin que ce
compté dans le sens du mouvement diurne, aprè
ajouté l'angle A, comme nous l'avons fait ci-dessu
fin du livre suivant, le calcul de l'heure par de
du soleil.

NOTE SUR LES PAGES 302 -

*Exemple de calcul de la latitude, d
de l'étoile polaire, observée près du
cercle répétiteur.*

Soit Δ la distance polaire apparente de l'étoi
l'observation; D la distance du pôle au zénith,
de la latitude supposée à-peu-près connue. Soi
de la pendule sur le tems sydéral. Si l'on fait,
plicité $\frac{r}{86400 - r} = r'$, et que l'on nomme
d'une observation compté en tems de la pendu

passage de l'étoile au méridien où l'on observe, la réduction de cette observation sera

$$\delta = \frac{\sin \Delta . \sin D \left\{ 1 + 2r' \right\}}{\sin Z} \cdot \frac{2''. \sin^2 \frac{1}{2} p''}{\sin 1''};$$

Z est la distance méridienne de l'étoile au zénith. Dans le cas que nous allons considérer, il s'agit d'un passage de la polaire *au méridien supérieur*; alors on a $Z = D - \Delta$, et la formule devient

$$\delta = \frac{\sin \Delta \sin D}{\sin \left\{ D - \Delta \right\}} \left\{ 1 + 2r' \right\} \frac{2''. \sin^2 \frac{1}{2} p''}{\sin 1''}.$$

Il ne s'agit plus que de calculer cette réduction pour chacune des observations de la série, d'en faire la somme et de la diviser par le nombre des observations, afin d'avoir la réduction moyenne, qu'il faut appliquer à la moyenne des distances zénithales; mais pour cela, il faut connaître les valeurs numériques des élémens qui entrent dans notre formule.

L'observation que nous allons calculer a été faite à Dunkerque, le 19 décembre 1808, le baromètre étant à 0,75425 et le thermomètre centésimal à $-4°$. La distance polaire apparente de l'étoile, pour ce même jour, était . . . $\Delta = 1°.42'.18''.59$

La distance du pôle au zénith, déterminée à très-peu près par des observations précédentes, était . . . $D = 38°.57'.55''$

Ce qui donne la distance méridienne. $Z = D - \Delta = 37°.15'.36''.41$

Avec ces données on trouve $\log \left\{ \frac{\sin \Delta . \sin D}{\sin Z} \right\} = 8,4900862.$

La pendule retardait journellement sur le tems sydéral, et son retard était $r = 69'',5$, ce qui donne $r' = \frac{69'',5}{86330,5} = 0,000805045$; d'où l'on voit que r' était un nombre extrêmement petit, ainsi qu'on l'a supposé dans la construction de la formule : on trouve ainsi $\log \left\{ 1 + 2r' \right\} = 0,0006986$. En ajoutant ce logarithme à celui que nous venons de former, on aura

Digitized by Google

$$\log . \left\{ \frac{\sin \Delta . \sin D \left\{ 1 + 2 r' \right\}}{\sin Z} \right\} = 8{,}4907848.$$

C'est le logarithme du facteur constant par lequel il faut multiplier toutes les réductions, en n'oubliant point que le logarithme de l'unité est supposé représenté par 10.

Maintenant, d'après la position apparente de la polaire, le 29 décembre 1808, on pouvait calculer l'heure de son passage au méridien de Dunkerque; et comme nous connaissions très-exactement la marche de notre pendule sur le tems sydéral, d'après les hauteurs absolues de Rigel et du soleil, nous étions en état d'assigner l'heure, la minute, la seconde marquées par notre pendule à un instant quelconque donné de tems sydéral. Nous avons ainsi conclu l'heure du passage de la polaire au méridien supérieur en tems de notre pendule, le 19 décembre 1808, $0_h . 24' . 44''$, et en prenant la différence de cette époque à toutes celles des observations particulières, nous en avons conclu les angles horaires de ces mêmes observations, ou les valeurs de p' rapportées au méridien supérieur. Connaissant p', nous avons pris la valeur du facteur $\frac{2'' . \sin^2 \frac{1}{2} p'}{\sin 1''}$ dans les tables destinées à cet effet, et que l'on trouvera dans notre troisième volume; alors nous avons pu calculer complètement la réduction δ, et le calcul s'achève ainsi qu'il suit :

Passage de l'étoile polaire au méridien supérieur.

0h. 24′. 44″	ANGLE HORAIRE.	RÉDUCTION.
23h. 57′. 2″	27′. 42″	1504 . 7
58 . 18	26 . 26	1370 . 4
59 . 6	25 . 38	1288 . 8
59 . 47	24 . 57	1221 . 0
0 . 27	24 . 17	1156 . 8
1 . 5	23 . 39	1097 . 2
1 . 46	22 . 58	1034 . 8
9 . 26	15 . 18	459 . 5
10 . 10	14 . 34	416 . 6
18 . 57	5 . 47	65 . 7
22 . 23	2 . 21	10 . 8
22 . 59	1 . 45	6 . 0
23 . 43	1 . 1	2 . 0
29 . 19	4 . 35	41 . 2
41 . 59	17 . 15	583 . 9
45 . 54	21 . 10	879 . 0
46 . 36	21 . 52	938 . 1
47 . 12	22 . 28	990 . 3
47 . 52	23 . 8	1049 . 8
48 . 31	23 . 47	1109 . 6
49 . 3	24 . 19	1159 . 9
50 . 21	25 . 37	1287 . 1
51 . 4	26 . 20	1360 . 1
52 . 47	28 . 3	1542 . 9
54 . 40	29 . 56	1756 . 8
2h. 0 . 18	35 . 34	2478 . 8
		24811 . 8

Digitized by Google

log 24811,8	4,3946618
log facteur	8,4907848
	2,8854466
26 observ. log 26	1,4149733
log δ	1,4704733
Réduction moyenne. . . . δ =	29″.55

Distance au zénith observée . . . . . .
Correction du niveau . . . . . .

Distance zénithale moyenne observée. . . . .
Réfraction calculée . . . . . .

Réduction au méridien soustractive δ . . . .

Distance méridienne de l'étoile au zénith. . .
Distance polaire de l'étoile. . . . . .

Distance du pôle au zénith D. . . . . .
Latitude 90° — D . . . . . .

On trouvera à la fin du livre suivant le c
par une observation du soleil.

Fin du Tome premie

Digitized by Google

Fautes essentielles à corriger.

Page 124, ligne 4 en remontant, *au lieu de* $\{p - \varphi\}$, *lisez :* $\cos\{p - \varphi\}$.

136, 17, *latitude parallèle*, lisez : *latitude du parallèle.*

154, 10 en remontant, dans la valeur de $\sin\frac{1}{2}(A - a)$, on a mis un ² dénominateur, ² $\cos h \cos h'$, *lisez :* $2 \cos h \cos h'$.

160, 6, *au lieu de* 16°,75, *lisez :* 16°,25.

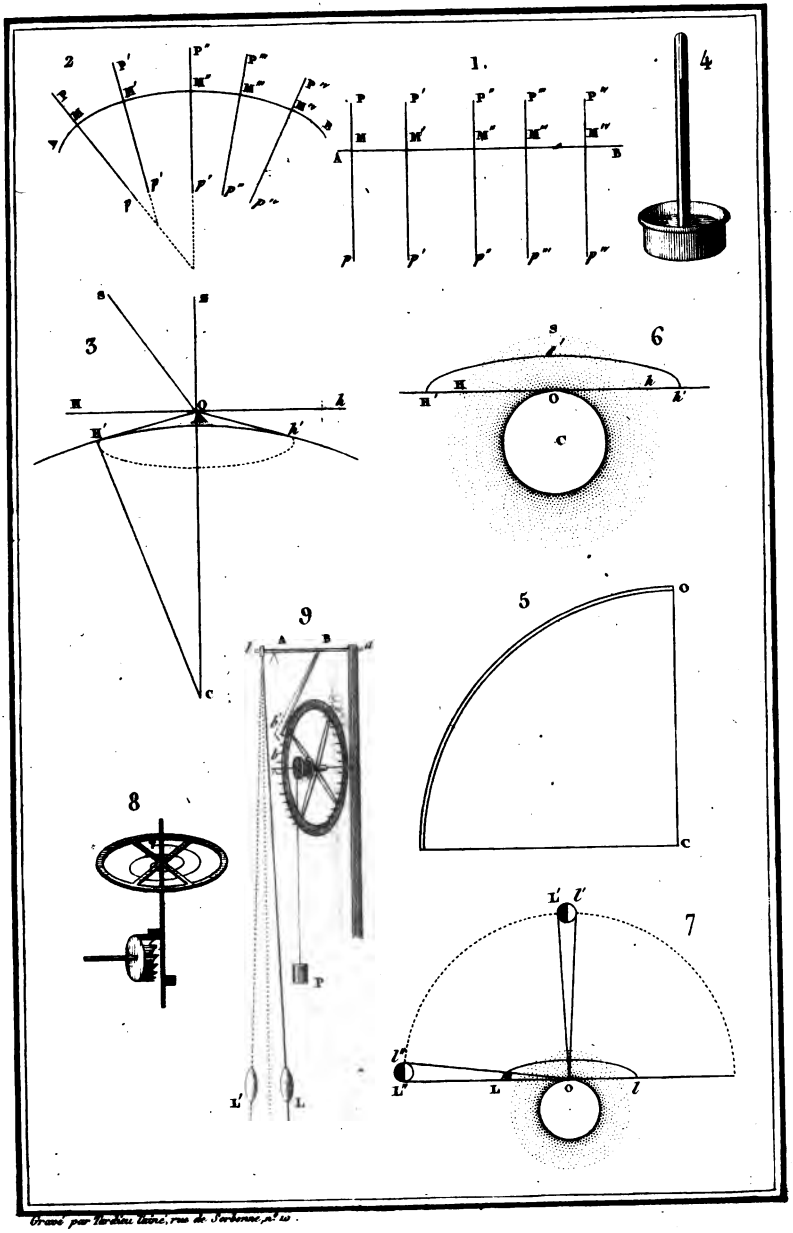
179, 14 en remontant, *effacez* sensiblement.

181, 2, *au lieu de* myriamètres, *lisez :* mètres.

254, 12 en remontant, *OLC*, *lisez : OPC.*

266, 6, *au lieu de* distance au zénith apparent, *lisez :* distance apparente au zénith vrai.

Digitized by Google

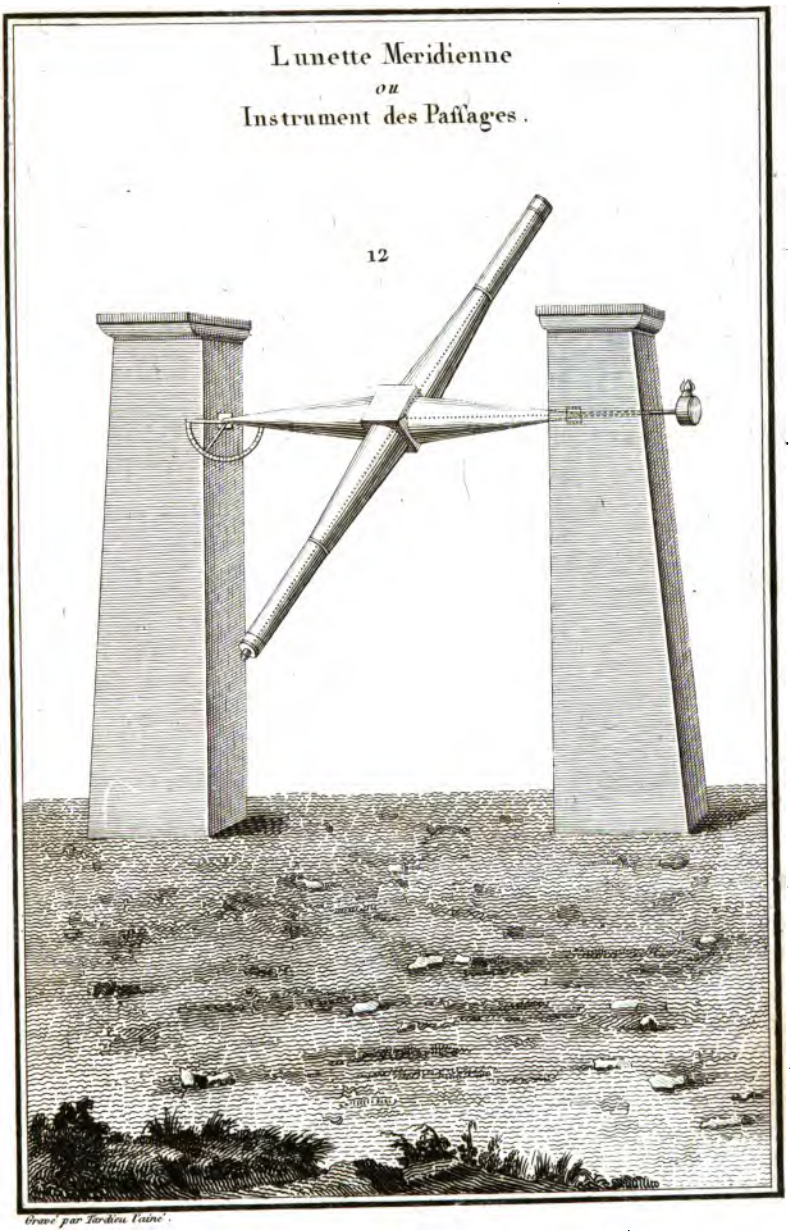


Gravé par Verdeau Aîné, rue de Sorbonne, n° 10.

Digitized by Google

Digitized by Google

Lunette Meridienne
ou
Instrument des Passages.

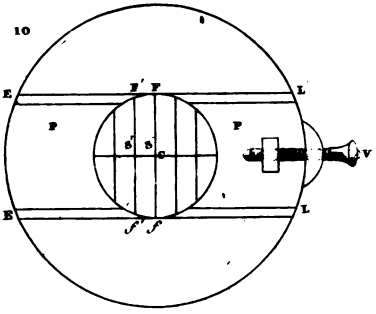


Gravé par Tardieu l'aîné.

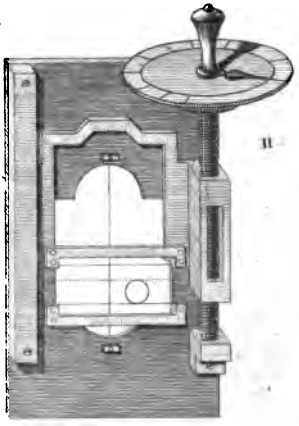
Digitized by Google

Digitized by Google

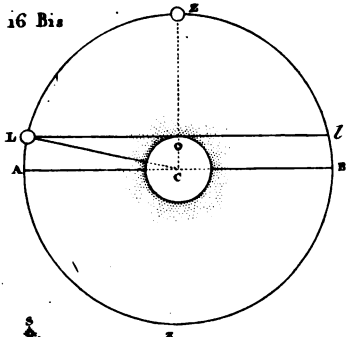
10



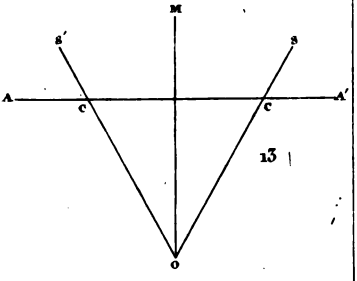
11



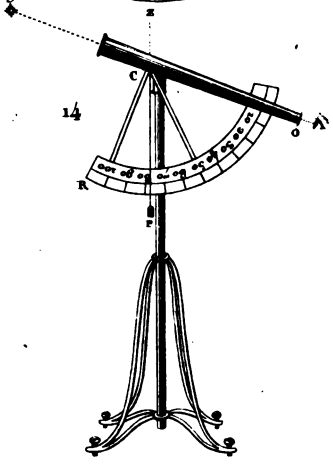
16 Bis



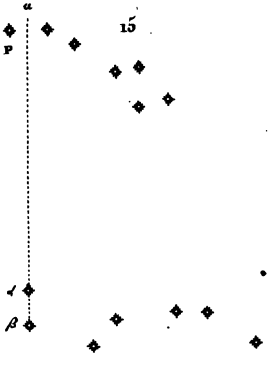
13



14



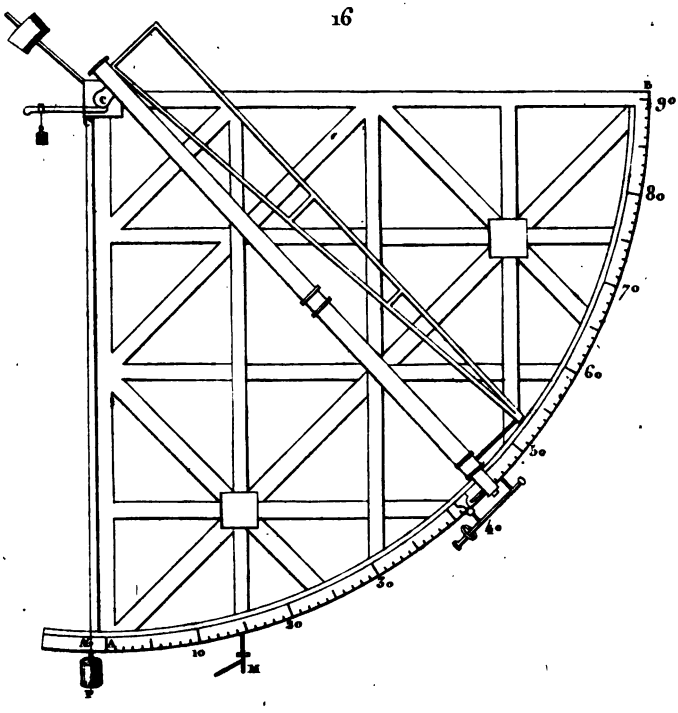
15

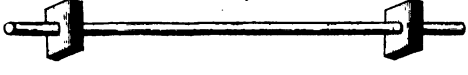


Gravé par Tardieu l'aîné.

Digitized by Google

Digitized by Google





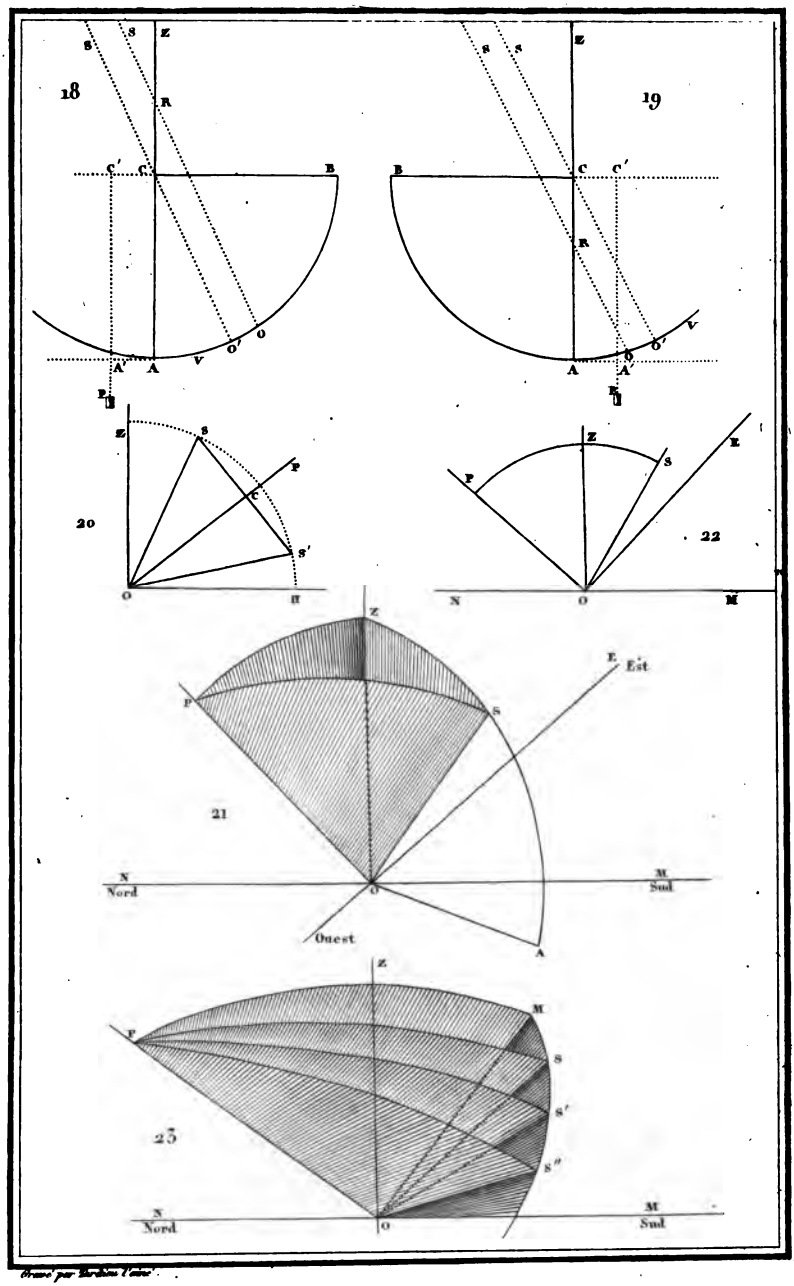
Gravé par Mr. Adam l'aîné.

P *Point de repere pour le fil à plomb.*

M *Rappel pour faire mouvoir le mural et ramener le point* P *sous le fil à plomb qu'and on voit qu'il s'en est écarté.*

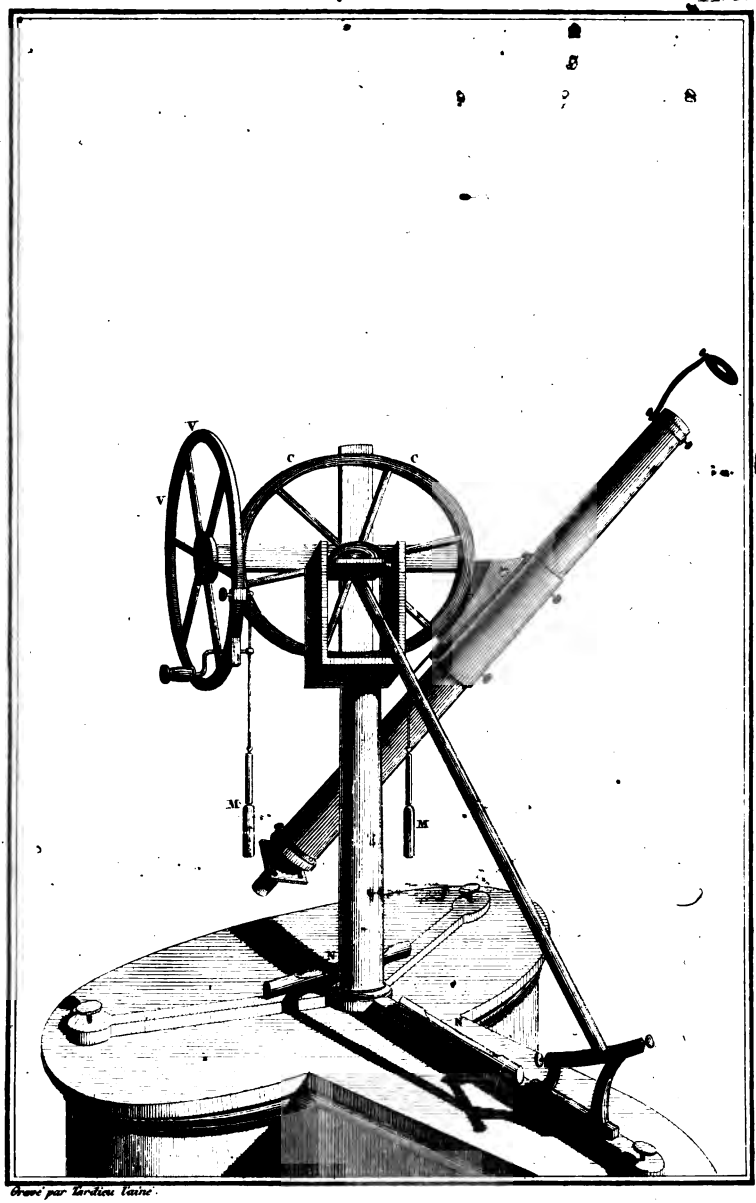
Digitized by Google

Digitized by Google



Digitized by Google
UNIV OF MIC

Digitized by Google



Gravé par Tardieu l'aîné.

C C *Est le cercle dirigé dans le plan de l'équateur.*

V V *Le cercle vertical sur lequel on mesure la déclinaison.*

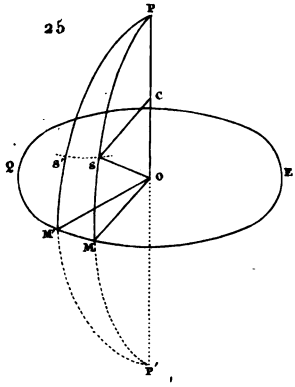
M M *Des rappels qui permettent de mouvoir à volonté la lunette.*

N N *Niveaux qui attestent la verticalité du pied de l'instrument.*

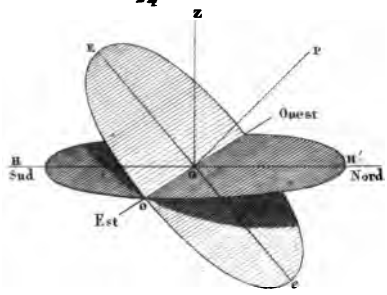
Digitized by Google
UNIV. OF M.

Digitized by Google

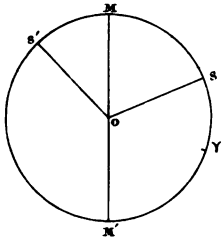
25



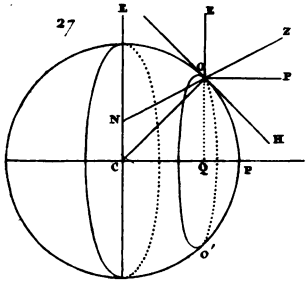
24



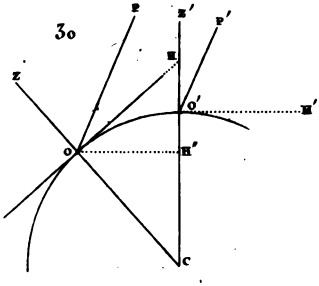
26



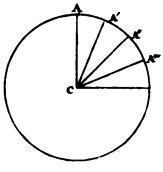
27



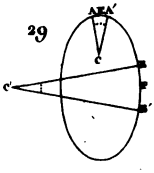
30



28



29

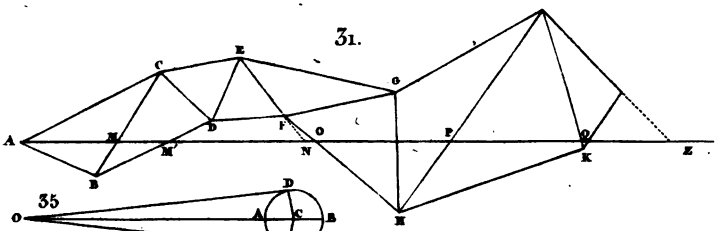


Gravé par Tardieu l'aîné.

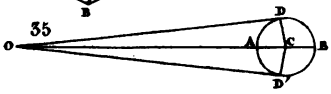
Digitized by Google
UNIV. OF MIC...

Digitized by Google

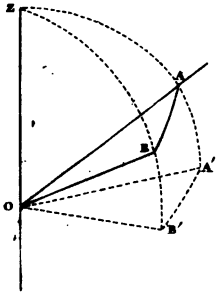
31.



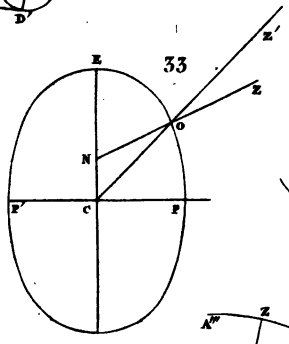
35



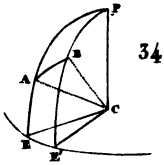
32



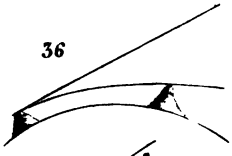
33



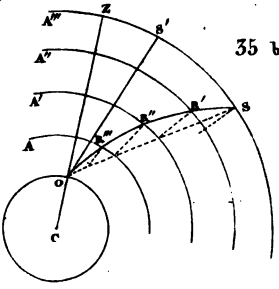
34



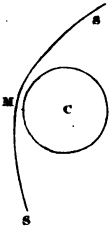
36

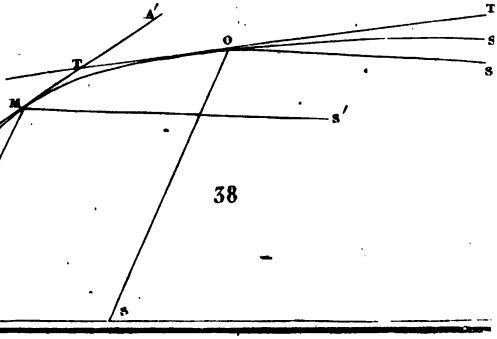


35 bis



37





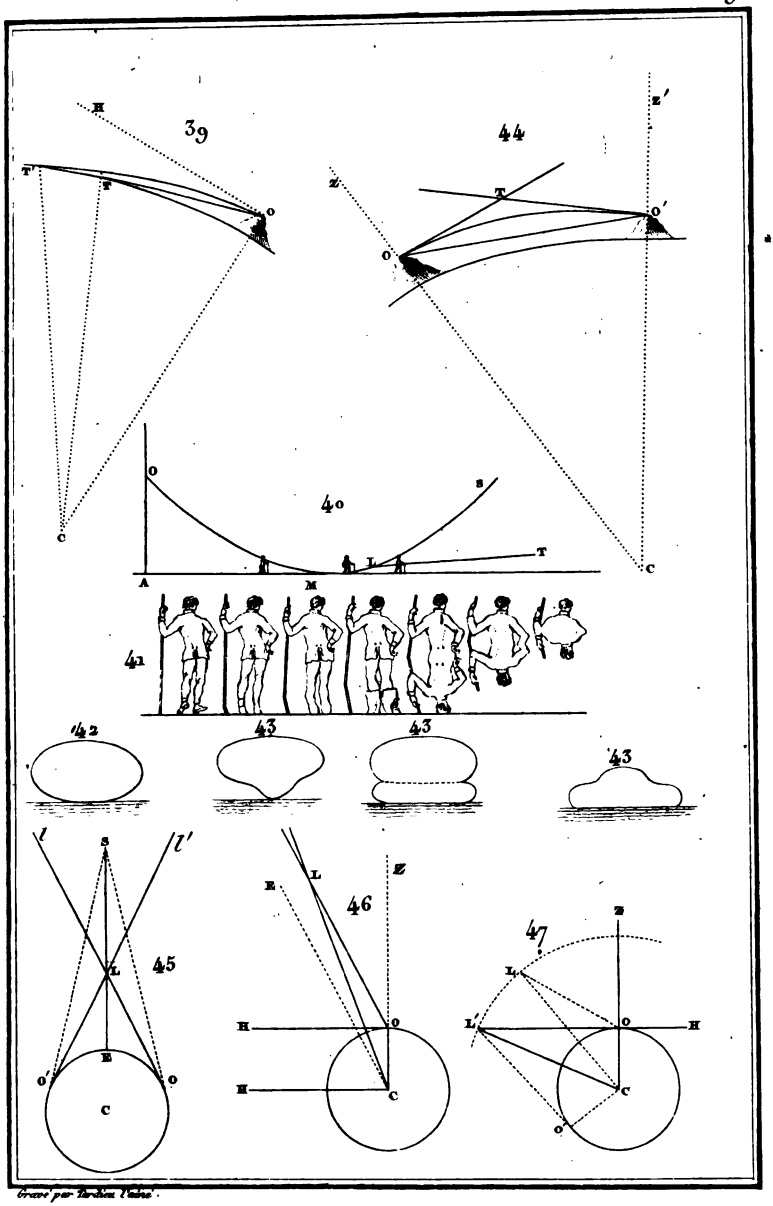
38

Gravé par Théodore Parent.

Digitized by Google

UNIV. OF

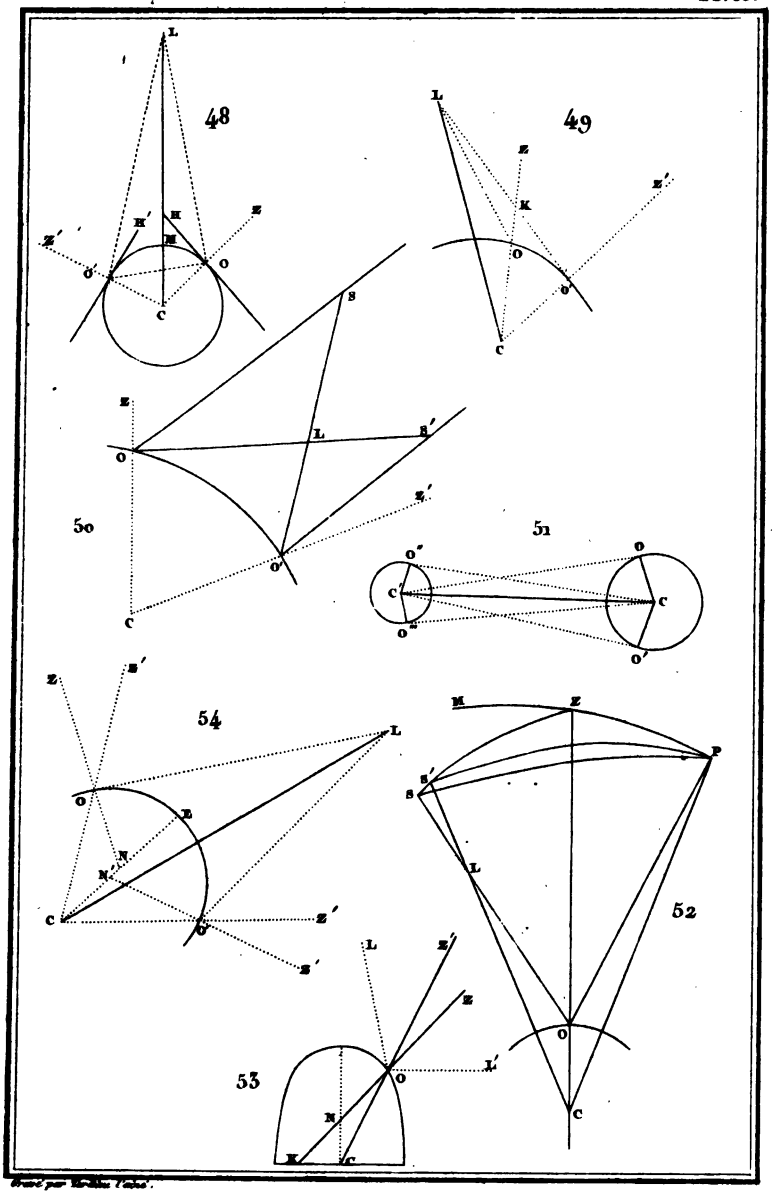
Digitized by Google



Gravé par Tardieu l'aîné.

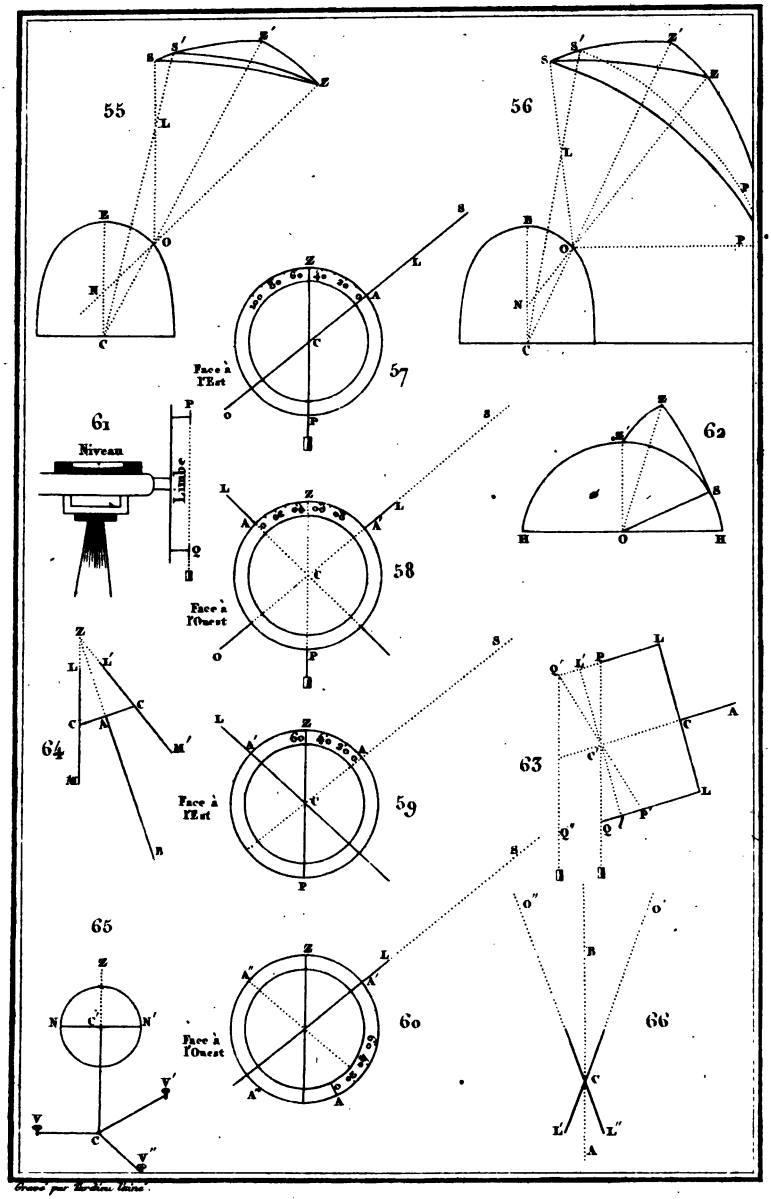
Digitized by Google
UNIV

Digitized by Google



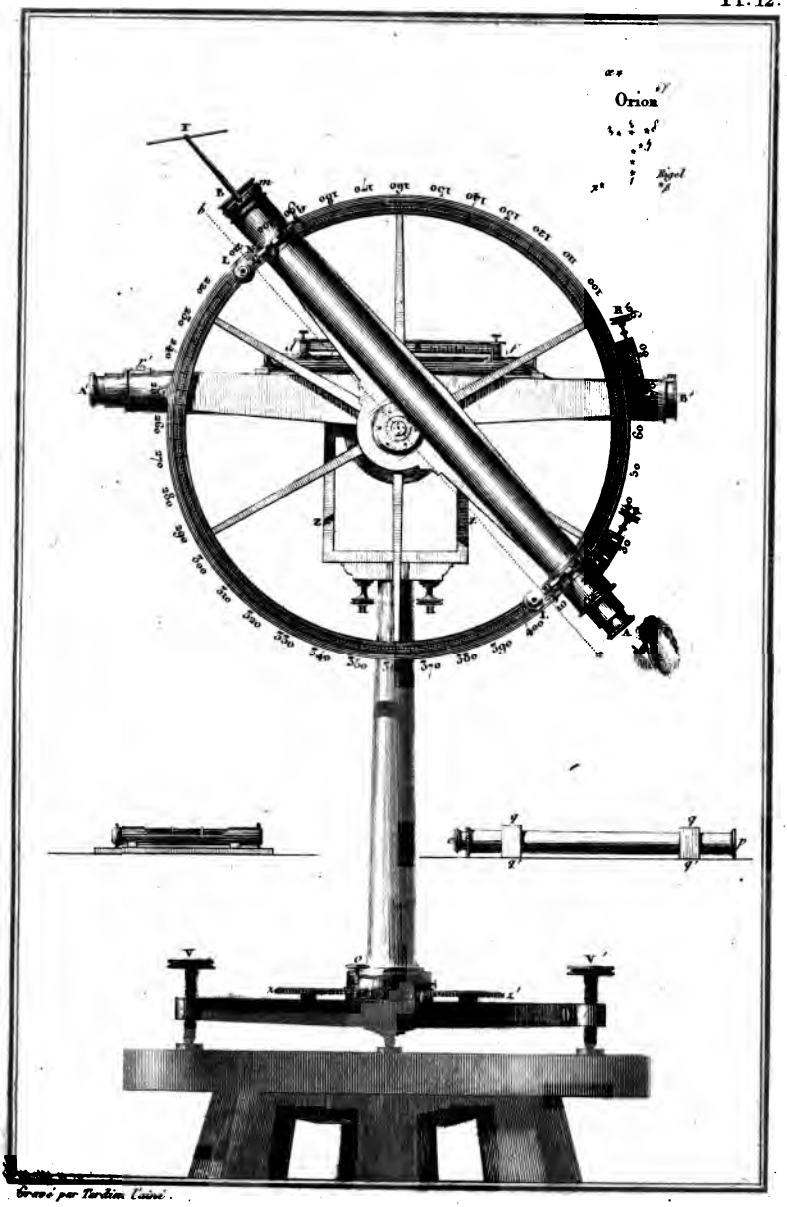
Digitized by Google

Digitized by Google



Digitized by Google

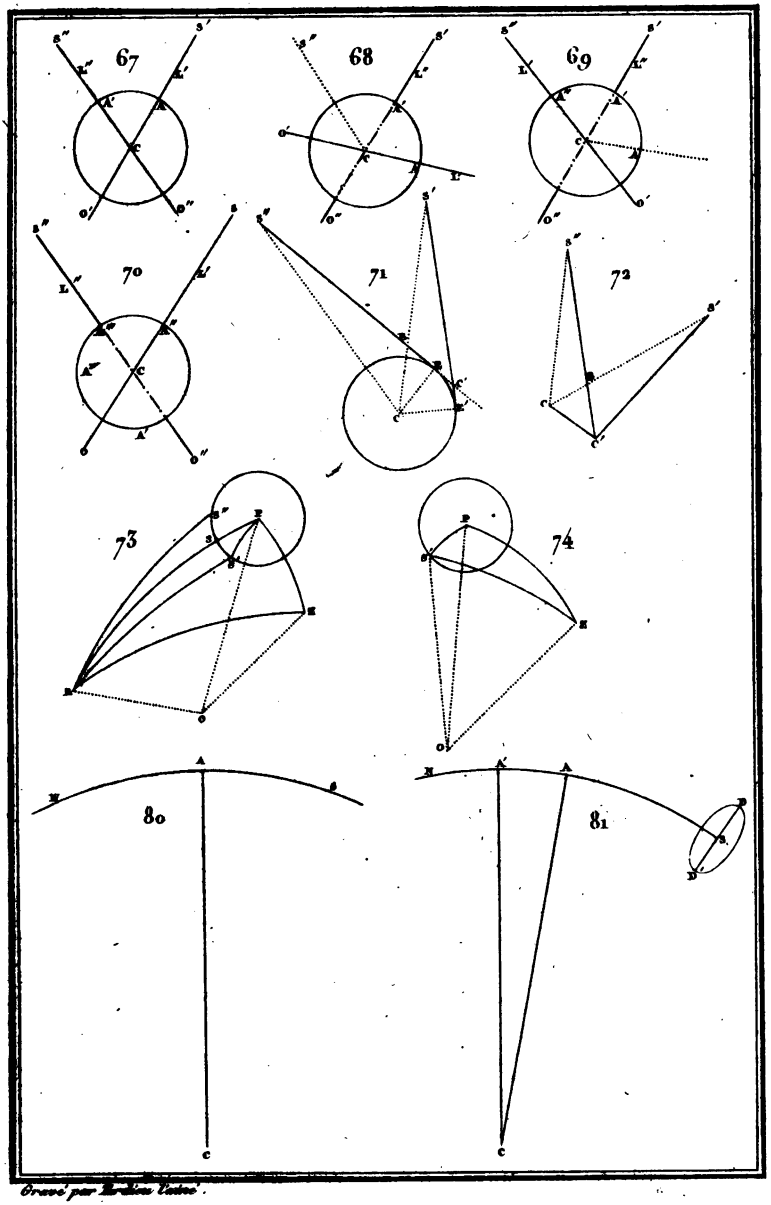
Digitized by Google



Gravé par Tardieu l'aîné.

Digitized by Google

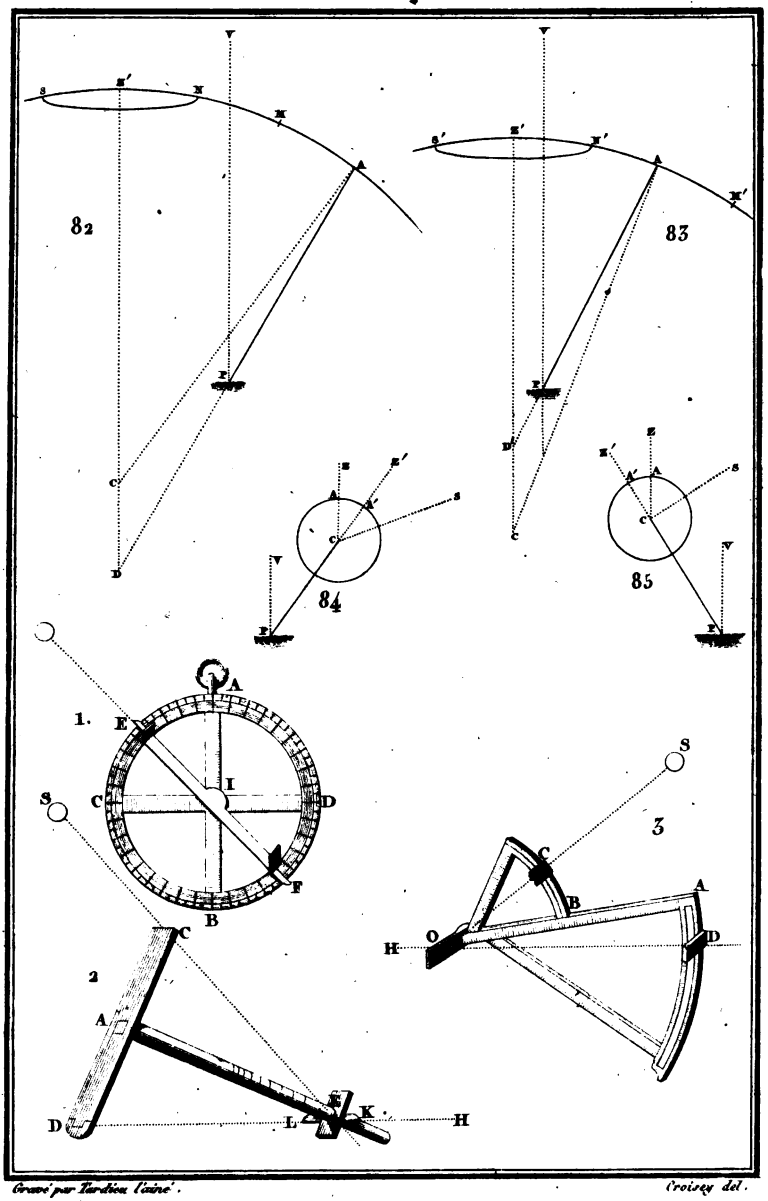
Digitized by Google



Gravé par Mr. Alex. Vadier.

UNIL
Digitized by Google

Digitized by Google

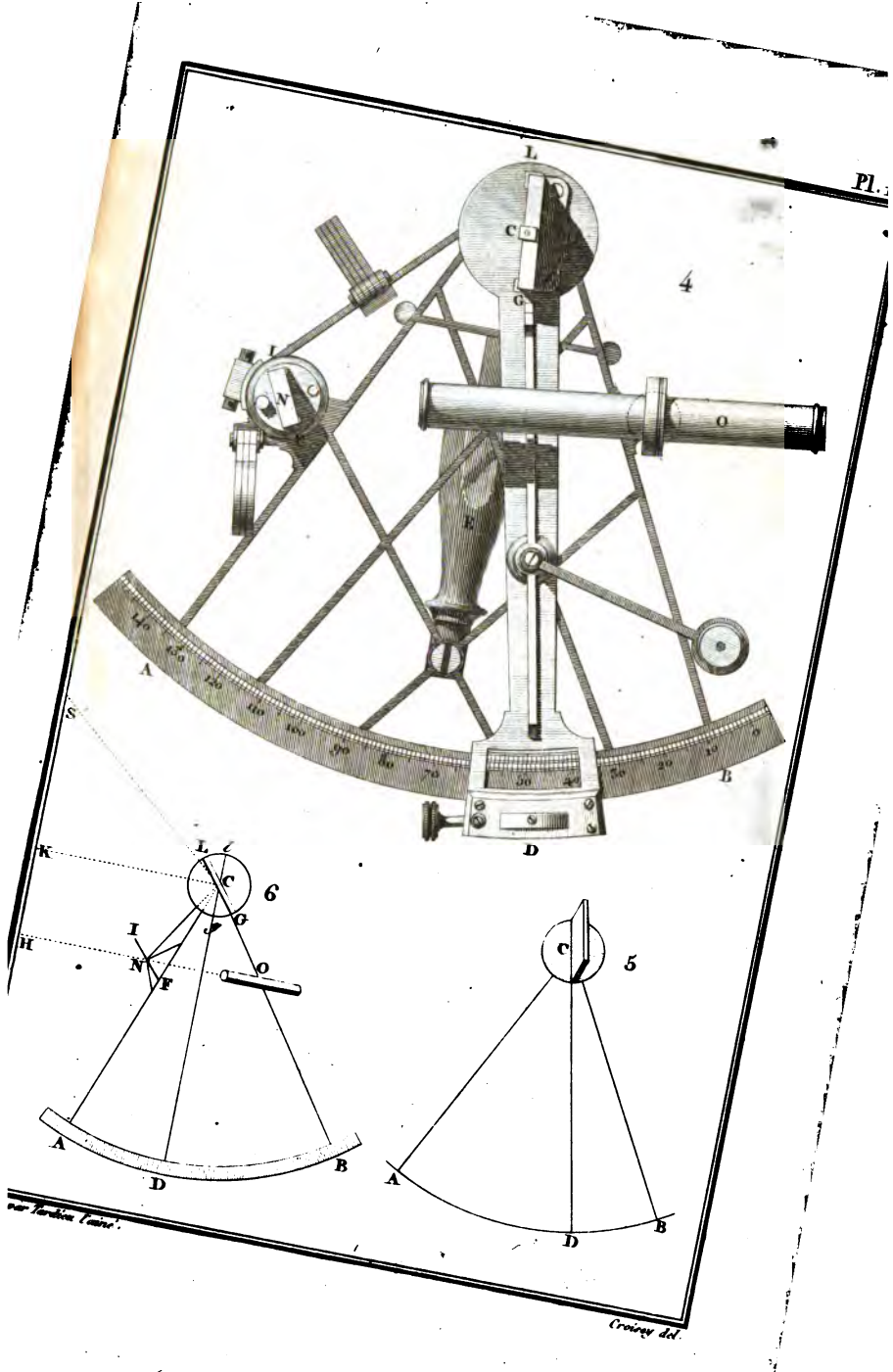


Gravé par Tardieu l'aîné.

Croisey del.

Digitized by Google

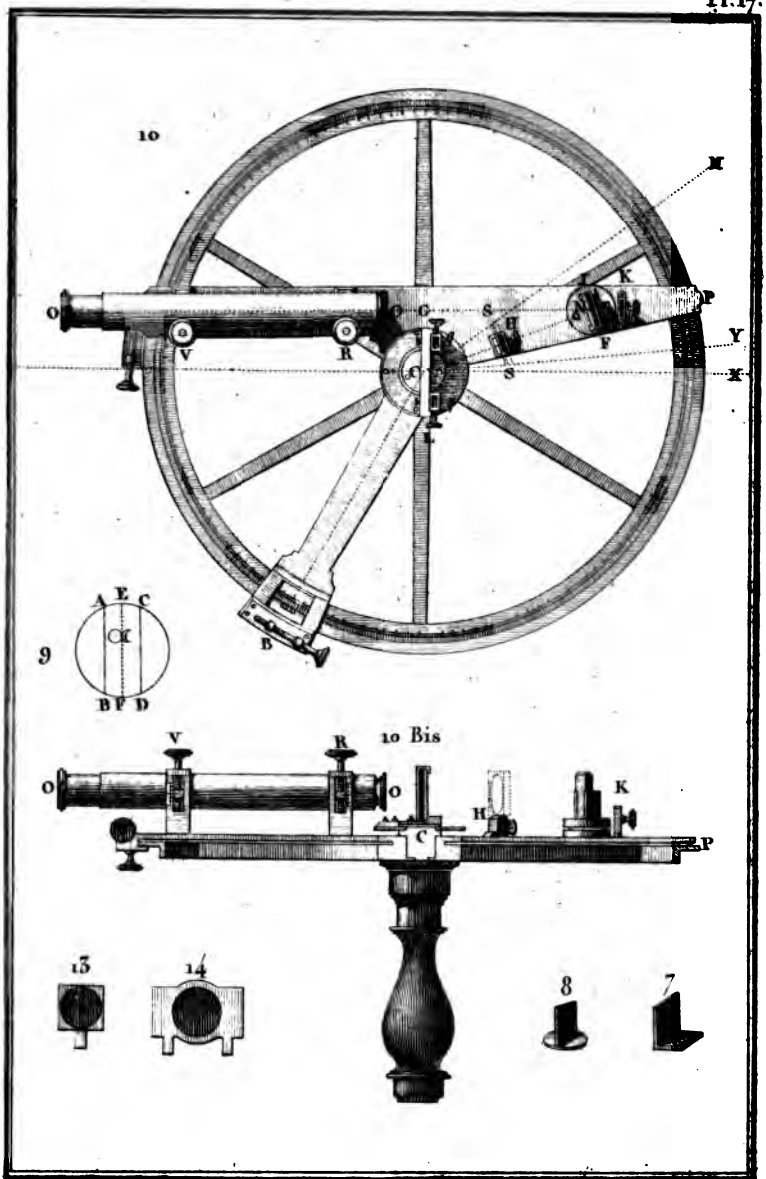
Digitized by Google



Croizey del.

Digitized by Google

Digitized by Google

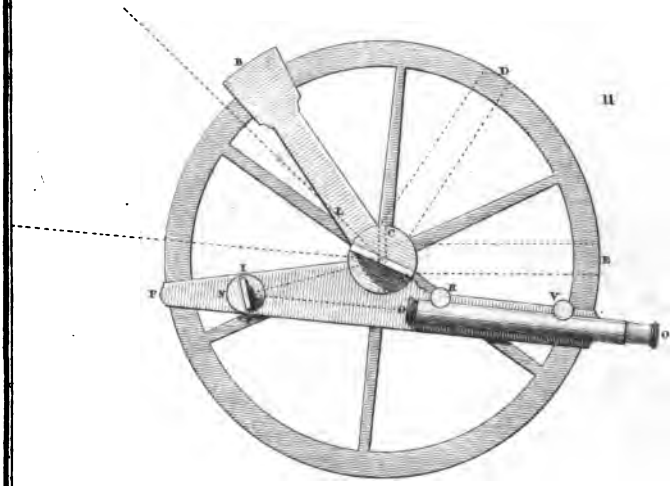


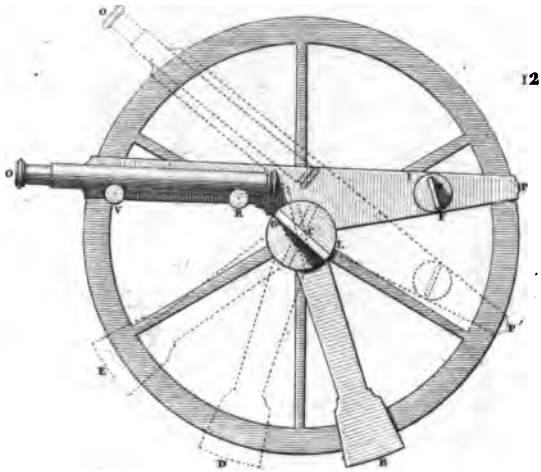
Gravé par Tardieu l'aîné.

Ovivey del.

Digitized by Google

Digitized by Google





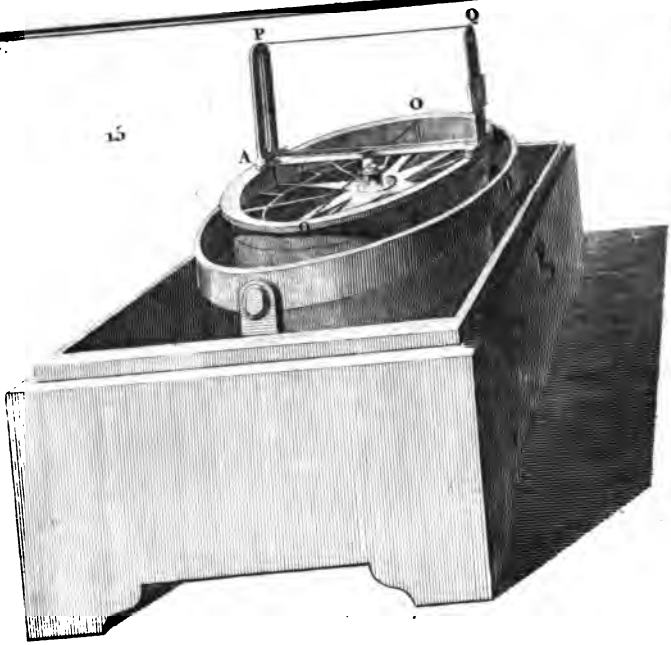
Gravé par Tardieu l'aîné.

Croisey del.

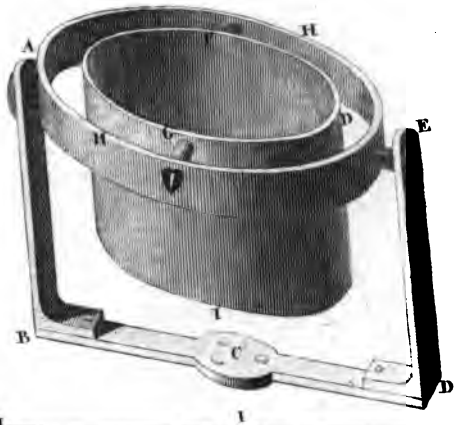
Digitized by Google

Digitized by Google

15



18



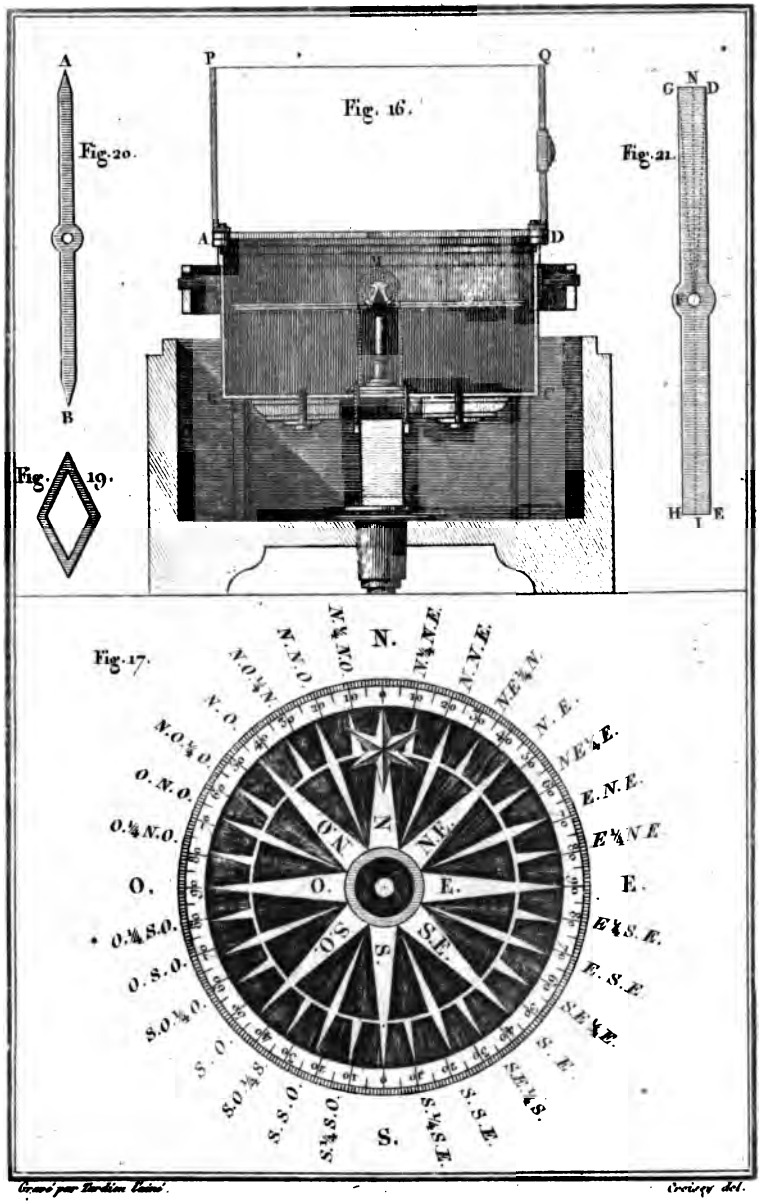
22

Gravé par Tardieu l'aîné.

Gréning del.

Digitized by Google

Digitized by Google



Gravé par Tardieu l'aîné.

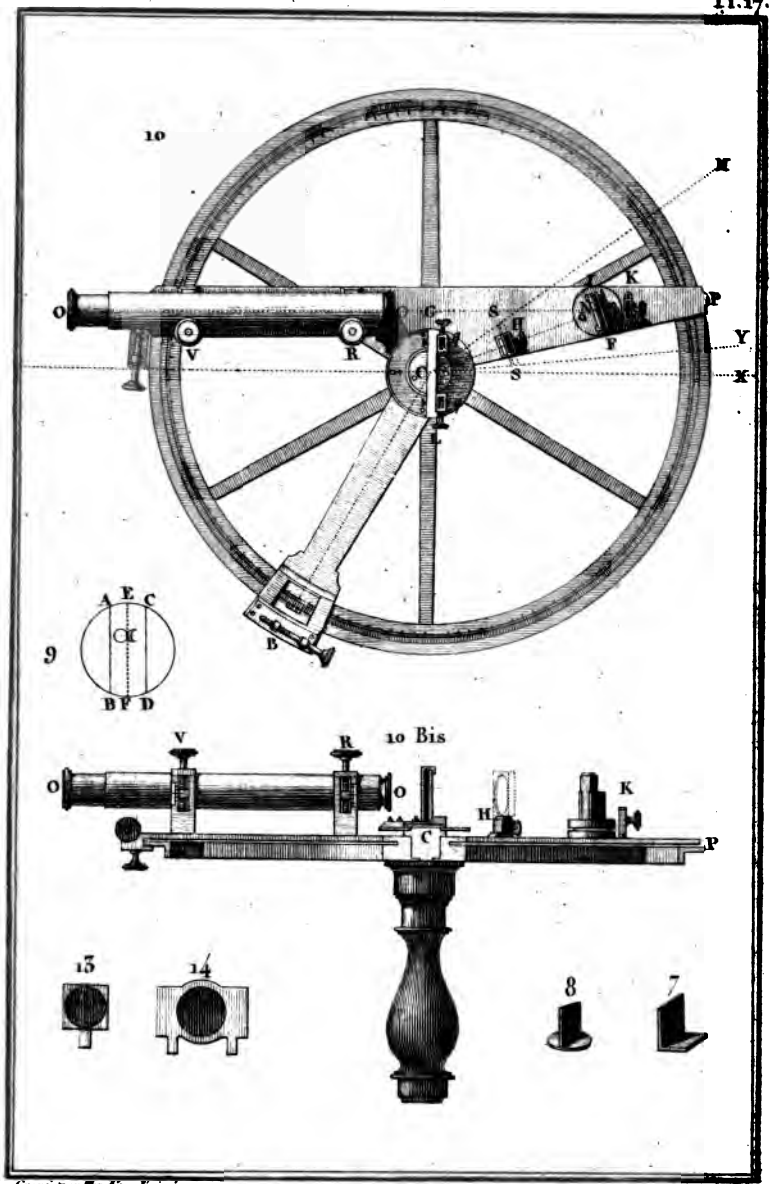
Crevieux del.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google



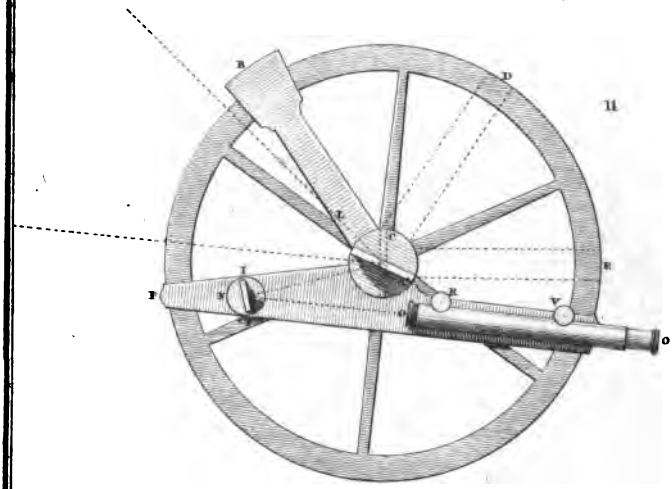
Gravé par Tardieu l'aîné.

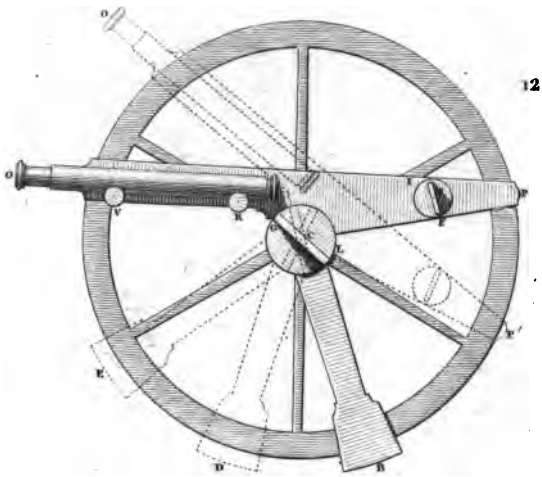
Crevisy del.

UNIV. NOR.

Digitized by Google

Digitized by Google





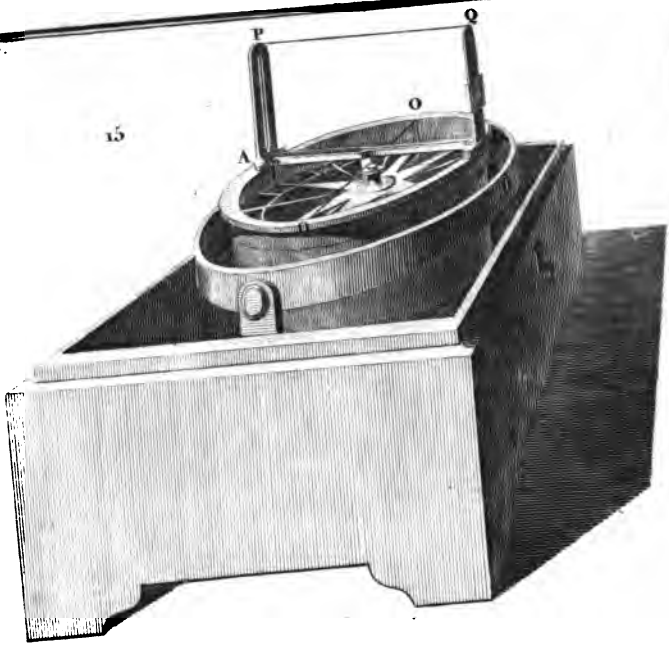
Gravé par Perdoux l'aîné.

Croisey del.

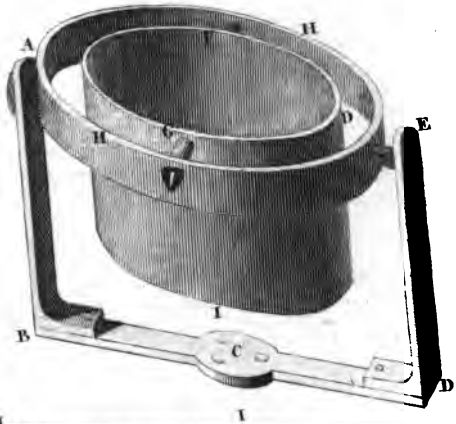
Digitized by Google

Digitized by Google

15



18



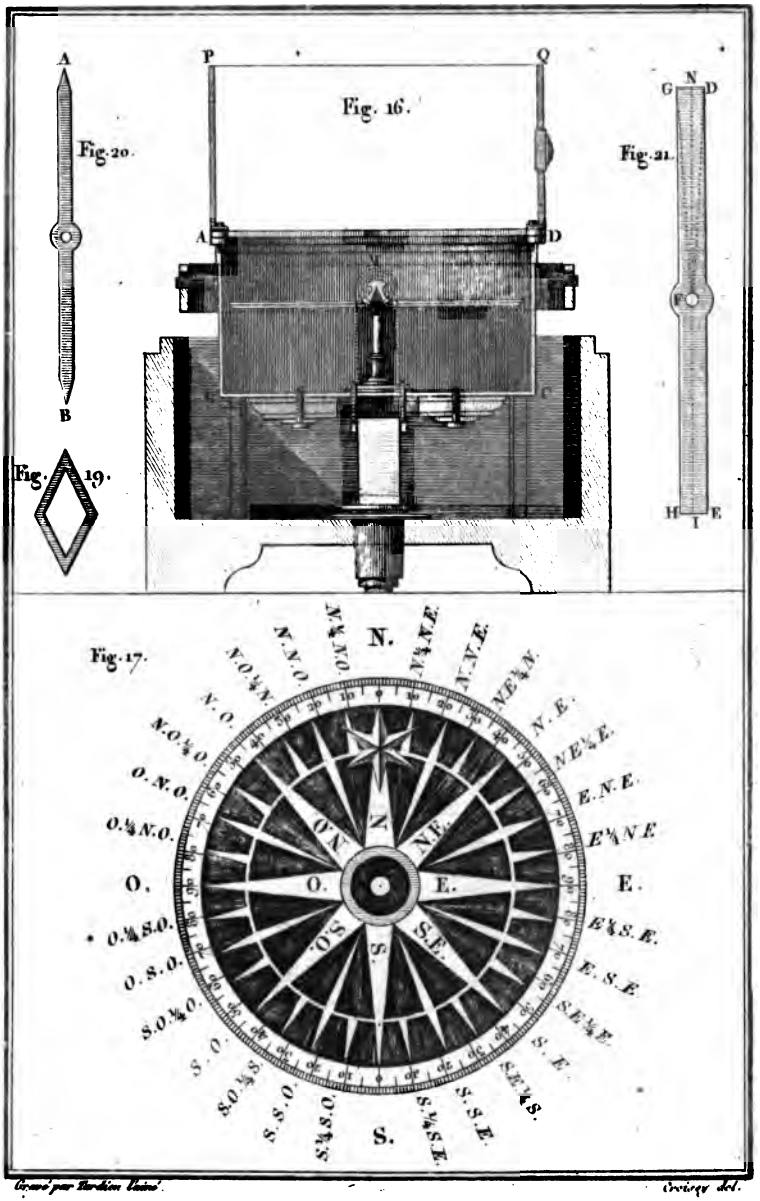
22

Gravé par Tardieu l'aine.

Crémery del.

Digitized by Google

Digitized by Google



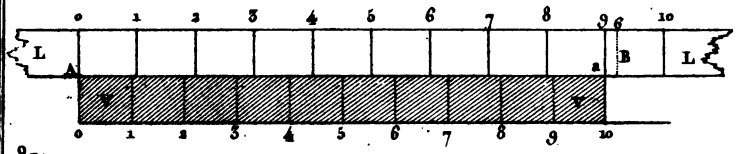
Gravé par Tardieu l'aîné.

Ovizeq del.

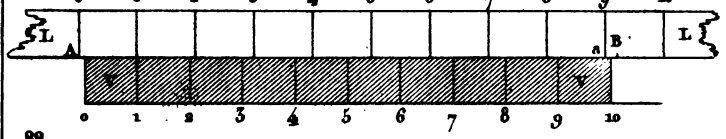
Digitized by Google

Digitized by Google

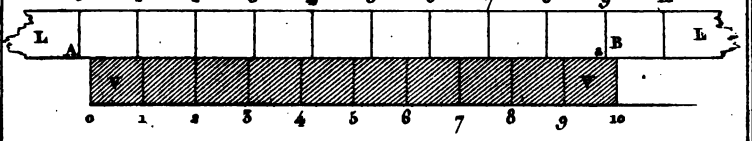
86



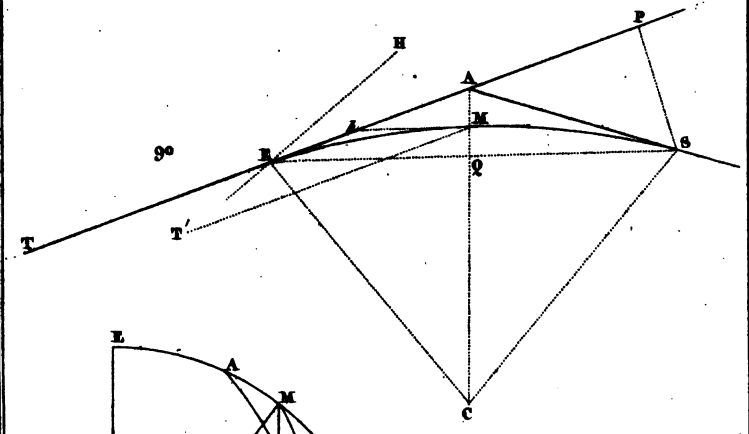
87



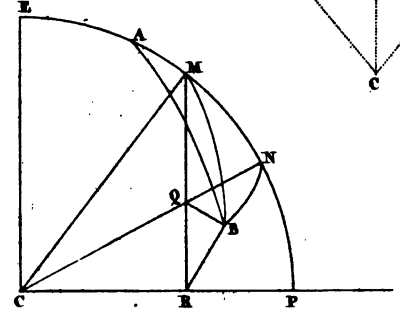
88



90



89



Gravé par Bardou l'aîné.

Digitized by Google

Digitized by Google